

Számok és műveletek

Hatványozás

1. a) 3^6 ; b) $2,4^4$; c) $(-0,6)^2$; d) $(-5)^3$; e) $\frac{3^7}{7}$; f) $\left(-\frac{5}{9}\right)^9$; g) b^8 ; h) $(-y)^5$; i) $\frac{1}{c}$; j) $\left(-\frac{1}{x}\right)^3$.

2. a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; b) $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2$; c) 18; d) $0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25$;

e) $(-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$; f) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$; g) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$;

h) $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4}$; i) $-(10 \cdot 10)$; j) $(-10) \cdot (-10)$; k) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$; l) $-\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5}$.

3. a) 64; b) 32; c) 81; d) 1854; e) -8; f) -8; g) 1; h) 1; i) 1; j) $-\frac{81}{5}$; k) $\frac{1}{125}$;
l) $\frac{1}{5}$.

4. a) <; b) =; c) =; d) >; e) =; f) <; g) <; h) >.

5. a) 8, 8, 4, 6, 2, 4, 2, 2; b) 9, 7, 1, 3, 3, 7, 1, 9; c) 6, 4, 4, 6, 4, 6, 6, 4; d) 5, 5, 5, 5; e) 6, 6, 6, 6.

6. 0, 1, 9;
5, 1, 6.

A hatványozás azonosságai

7. a) $5^7 = 78\,125$; b) $3^9 = 19\,683$; c) $2^6 = 64$; d) $10^7 = 10\,000\,000$; e) $6^3 = 216$; f) $8^1 = 8$;
g) $\frac{1}{12}$; h) $9^2 = 81$; i) $2^{12} = 4\,096$; j) $3^6 = 729$; k) $10^4 = 10\,000$; l) $8^8 = 16\,777\,216$.

8. a) $(-2,3)^4 \cdot 1,5^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0,7^1$; c) $1^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2$; d) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0,5^1$.

9. a) $10^2 \cdot 10^6 = 10^8$; b) $8^8 \cdot 8^8 = 8^{14}$; c) $(7^2)^3 = 7^6$; d) $\frac{5^3 \cdot 5^{20}}{5^{16}} = 5^7$.

10. a) 10^6 ; b) 10^6 ; c) 10^9 ; d) 10^8 ; e) 10^6 ; f) $(4^3 \cdot 5^3)^2 = (20^3)^2 = 20^6 = 2^6 \cdot 10^6$;

g) $\left(\frac{5^4 \cdot 2^4}{5^4}\right)^2 = 2^8$; h) 3^{10} ; i) 8^4 ; j) $\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^6 \cdot 2^6}{3^3} = 2^{10} \cdot 3^5 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 2 \cdot 3)^5 = 12^5$.

11. =; <; =; <; <;

12. a) 3; b) 4; c) 6; d) 15; e) 6, 12; f) 16, 32; g) 2; h) 6; i) 12, 8; j) 12, 6.

13. a) $2^6 \cdot 2^9 = 2^{15} = 32\,768$; b) $3^4 \cdot 3^5 = 3^9 = 19\,683$; c) $6^3 \cdot 6^5 = 6^8 = 1\,679\,616$;
 d) $8^3 \cdot 8^4 = 8^7 = 2\,097\,152$; e) $4^8 : 4^6 = 4^2 = 16$; f) $3^{12} : 3^9 = 3^3 = 27$;
 g) $7^7 : 7^5 = 7^2 = 49$; h) $4^{10} : 4^8 = 4^2 = 16$; i) $2^{11} \cdot 2^{15} : 2^{10} = 2^{16} = 65\,536$;
 j) $2^{19} : 2^{15} \cdot 2^8 = 2^4 \cdot 2^8 = 2^{12} = 4096$; k) $6^2 \cdot 6^4 \cdot 6^3 : 6^5 = 6^9 : 6^5 = 6^4 = 1296$;
 l) $7^9 : 7^7 \cdot 7^3 = 7^2 \cdot 7^3 = 7^5 = 16\,807$.

14. a) $2^{16} = 65\,536$; b) $3^{14} \cdot 2^7 = 4\,782\,969 \cdot 128 = 612\,220\,032$; c) $2^{11} = 2048$; d) $3^5 = 243$;
 e) $5^5 = 3125$; f) $2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$; g) $6^4 \cdot 2 = 1296 \cdot 2 = 2592$; h) $3^3 = 27$.

15. a) 8; b) 63; c) +11; d) 118; e) 1; f) $\frac{1}{3}$.

16. I; H; H; H; I.

17. <; =; =; <.

Számok normálalakja

18. a) $1,2 \cdot 10^5$; b) $3,4 \cdot 10^2$; c) $4,328 \cdot 10^4$; d) $5,67 \cdot 10^4$; e) $3 \cdot 10^3$; f) $1,4 \cdot 10^1$;
 g) $6,5 : 10^3$; h) $9,87 : 10^8$; i) $1,3 : 10^1$; j) $2,007 : 10^4$; k) $2,3 : 10^{12}$; l) $9 : 10^1$.

19. a) 1230; b) 20 450 000; c) 500 000; d) 7 600 000 000; e) 0,000 13;
 f) 0,000 000 007; g) 0,000 003 27; h) 0,000 005 12.

20. a) $2,5 \cdot 10^4$; b) $1,5 \cdot 10^3$; c) $1 \cdot 10^5$; d) $5,92 \cdot 10^6$; e) $4,5 : 10^2$; f) $7 \cdot 10^5$;
 g) $3,294 \cdot 10^9$; h) $2 \cdot 10^4$.

Műveletek racionális számokkal

21. a) 0,4; b) 0,12; c) 0,7; d) 0,85; e) 1,88; f) 0,36; g) 1,875; h) 1,76.

A fenti tört alakú számok tizedes tört alakja **véges** tizedes tört.

$$5 = 5; \quad 25 = 5 \cdot 5; \quad 10 = 2 \cdot 5; \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5; \quad 25 = 5 \cdot 5; \quad 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5;$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2; \quad 125 = 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

A nevezők prímtényezős alakjában csak **2 és 5** prímtényezők szerepelnek.

22. a) 0,41 $\dot{6}$; b) 0,4 $\dot{4}$; c) 0,6 $\dot{6}$; d) 0,71428 $\dot{5}$; e) 0,458 $\dot{3}$; f) 0,76923 $\dot{0}$;
g) 0,6428571; h) 0,46; i) 0,05.

A fenti tört alakú számok tizedes tört alakja **végtelen szakaszos** tizedes tört.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 9 = 3 \cdot 3; \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 14 = 2 \cdot 7; \quad 15 = 3 \cdot 5; \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

A nevezők prímtényezős alakjában itt már kettesen és ötösön kívül **más** prímtényezők is szerepelnek.

23. a) $0,23 = \frac{23}{100}$; b) $0,0065 = \frac{13}{2000}$; c) $0,138 = \frac{69}{500}$; d) $1,5 = \frac{3}{2}$;
e) $3,25 = \frac{13}{4}$; f) $10,5 = \frac{21}{2}$.

24. a) $-0,8 < -\frac{4}{5} < -0,09 < 0,075 < 0,3 < \frac{3}{4} < \frac{9}{11}$;

b) $340 : 10^1 < 310\,000 : 10^3 < 0,034 \cdot 10^4 < 3,5 \cdot 10^2 < 3500$.

25.

	0,45	35,8	6,5	7800	0,825
normálalak	$4,5 : 10^1$	$3,58 \cdot 10^1$	$6,5 \cdot 10^0$	$7,8 \cdot 10^3$	$8,25 : 10^1$
$\square \cdot 10$	$0,045 \cdot 10$	$3,58 \cdot 10$	$0,65 \cdot 10$	$780 \cdot 10$	$0,0825 \cdot 10$
$\square \cdot \frac{1}{100}$	$45 \cdot \frac{1}{100}$	$3580 \cdot \frac{1}{100}$	$650 \cdot \frac{1}{100}$	$780000 \cdot \frac{1}{100}$	$8,25 \cdot \frac{1}{100}$
törtalak	$\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$	$\frac{358}{10} = \frac{179}{5}$	$\frac{65}{10} = \frac{13}{2}$	$\frac{78000}{10}$	$\frac{825}{1000} = \frac{33}{40}$
$\square \cdot 10^n$ vagy $\square : 10^n$ és $\square \in \mathbb{Z}$	$45 : 10^2$	$358 : 10^1$	$65 : 10^1$	$7800 \cdot 10^0$	$825 : 10^3$

26.

	74 100	100,7	49	4,12	0,0054
normálalak	$7,41 \cdot 10^4$	$1,007 \cdot 10^2$	$4,9 \cdot 10^1$	$4,12 \cdot 10^0$	$5,4 : 10^3$
$\square \cdot 100$	$741 \cdot 100$	$1,007 \cdot 100$	$0,49 \cdot 100$	$0,0412 \cdot 100$	$0,000054 \cdot 100$
$\square \cdot 0,1$	$741\ 000 \cdot 0,1$	$1007 \cdot 0,1$	$490 \cdot 0,1$	$41,2 \cdot 0,1$	$0,054 \cdot 0,1$
törtalak	$\frac{741000}{10}$	$\frac{1007}{10}$	$\frac{490}{10}$	$\frac{412}{100}$	$\frac{54}{10000}$
$\square \cdot 10^n$ vagy $\square : 10^n$ és $\square \in \mathbb{Z}$	$741 \cdot 10^2$	$1007 : 10^1$	$49 \cdot 10^0$	$412 : 10^2$	$54 : 10^4$

27. a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{5}{11}$; c) $\frac{8}{41}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{7}{11}$.

28. a) $\frac{8}{9}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{7}{9}$; f) $\frac{5}{7}$; g) $\frac{2}{7}$; h) $\frac{5}{9}$; i) nem lehet.

29. a) $\frac{105}{168}$; b) $\frac{65}{104}$; c) $\frac{75}{120}$; d) $\frac{70}{112}$; e) $\frac{60}{96}$.

30. a) $\frac{11}{36}$; b) $-\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{9}$; d) $-\frac{22}{105}$; e) $\frac{17}{20}$; f) +4,43; g) 21,87; h) +0,41;
i) (-1,365); j) $2\frac{17}{18}$.

31. a) $1\frac{1}{15}$; b) $\left(-\frac{5}{16}\right)$; c) $\left(-6\frac{2}{5}\right)$; d) $\frac{4}{7}$; e) $\left(-1\frac{1}{14}\right)$; f) $\left(-2\frac{16}{25}\right)$; g) $\left(\frac{3}{10}\right)$;

h) (-18); i) 0,72; j) 153,45; k) 68,175; l) 2,68; m) 500; n) 0,0125; o) (-0,108);

p) $\frac{7}{20}$; q) $\left(-9\frac{5}{7}\right)$; r) $\frac{1}{6}$.

32. a) $\frac{1}{2}$; b) 40,06; c) (-21); d) $5\frac{2}{3}$; e) 0; f) (-21); g) 10,65; h) 1; i) $\frac{259}{221}$;

j) $11\frac{29}{81}$; k) (-1); l) 40,06.

Számelmélet

Osztó, többszörös, oszthatóság

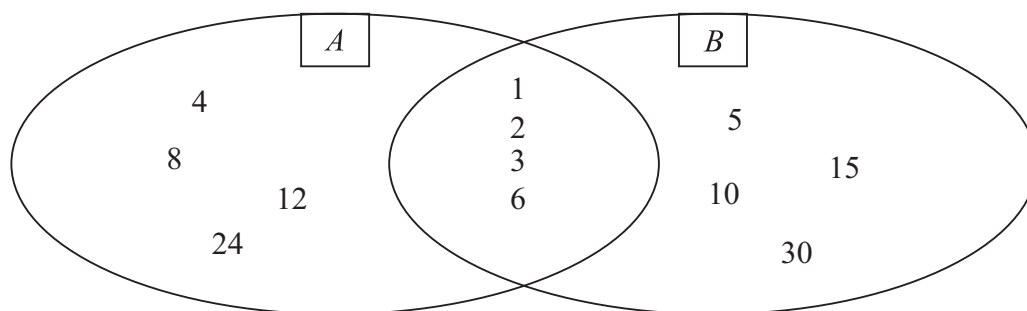
- 1.** a) 1, 2, 7, 14;
 b) 1, 19;
 c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72;
 d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Minden szám osztható **1**-gyel és **önmagával**.

- 2.** a) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 ...
 b) 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 ...
 c) 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 ...
 d) 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153 ...

Minden számnak többszöröse a **nulla** és **önmaga**.

- 3.** $A = \{24 \text{ osztói}\} = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24;$ $B = \{30 \text{ osztói}\} = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$



24 és 30 közös osztói: 1, 2, 3, 6.

A legnagyobb közös osztó: 6.

4 és 6 közös többszöröse: 12, 24, 36,

Nem. A két számnak nincs kisebb közös többszöröse.

$[4;6] = 12.$

4.

	3-mal	4-gyel	6-tal	8-cal	9-cel	12-vel	18-cal
72	I	I	I	I	I	I	I
172	N	I	N	N	N	N	N
372	I	I	I	N	N	I	N
1992	I	I	I	I	N	I	N
2007	I	N	N	N	I	N	N
45618	I	N	I	N	N	N	N

- 5.** a) 123, 612, 1236, 9036; b) 750, 786, 3528, 3864; c) 765, 279, 1467, 1305;
 d) 690, 435, 3645, 1890; e) 384, 216, 5904, 4296.

SZÁMELMÉLET

6. a) 471, 525; b) 342, 144; c) 108, 420; d) 525, 930; e) 763, 531; f) 179, 287.

7.

	3-mal	6-tal	9-cel	12-vel	18-cal	20-szal	24-gyel
37 ■■■7	lehet	nem	lehet	nem	nem	nem	nem
555■	lehet	nem	lehet	lehet	nem	nem	nem
4■■■70	lehet	nem	lehet	nem	lehet	nem	lehet
■■■918	lehet	nem	lehet	nem	lehet	nem	nem

8. I; H; I; I; H; I.

9.

2	3	7	9	2	3	9	7	2	7	9	3	2	7	3	9	2	9	3	7	2	9	7	3
3	2	9	7	3	2	7	9	3	7	2	9	3	7	9	2	3	9	7	2	3	9	2	7
7	2	9	3	7	2	3	9	7	3	9	2	7	3	2	9	7	9	3	2	7	9	2	3
9	7	3	2	9	7	2	3	9	3	2	7	9	3	7	2	9	2	7	3	9	2	3	7

a) 24; b) 18; c) 6; d) 24.

10.

Szám	1254	34 263	22 222	202 020	128 703	645 320
9-cses maradék	3	0	1	6	3	2

a) 0; b) 3; c) 7; d) 1; e) 3; f) 5; g) 2; h) 0.

11.

Szám	98	113	136	151	163	180	201
7-es maradék	0	1	3	4	2	5	5

a) $98+136+151$; $98+163+180$; $98+163+201$;

b) $98 \cdot 113 \cdot 136$; $98 \cdot 151 \cdot 163$; $180 \cdot 98 \cdot 201$.

12. a) I; b) H; c) H; d) H.

Prímszám, összetett szám, prímtényezős felbontás

- 13.** A 9 osztói: 1, 3, 9. A 10 osztói: 1, 2, 5, 10.
 A 16 osztói: 1, 2, 4, 8, 16. A 20 osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 20.
 A 29 osztói: 1, 29. A 32 osztói: 1, 2, 4, 8, 16, 32.
 A 49 osztói: 1, 7, 29. Az 50 osztói: 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Prímszámok: 29.
 Összetett számok: 9, 10, 16, 20, 32, 49, 50.
 Páratlan számú osztója van: 9, 16, 49.
 További példák: 36, 64, 81, 100.
 A **négyzetszámok**nak van páratlan darabszámú osztója.

- 14.** a) I; b) H; c) H; d) H; e) H; f) I; g) I; h) I.

15.

$$\begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$76 = 2^2 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$324 = 2^2 \cdot 3^4$$

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 5 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 1152 & 2 \\ 576 & 2 \\ 288 & 2 \\ 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$1152 = 2^7 \cdot 3^2$$

- 16.** I; I; I; H.
 I; H; I; H.

- 17.** $16 = 2^4$; $25 = 5^2$;
 $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $49 = 7^2$;
 $64 = 2^6$; $81 = 3^4$;
 $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$.

A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímtényező hatványkitevője **páros** szám.

- 18.** $B = 3^2 \cdot 5^4$
 $C = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7^4$

19. a) Négyzetszám; b) páratlan szám; c) osztható 9-cel; d) 5-re végződik;
 e) osztható 35-tel; f) osztható 3-mal; g) osztható 15-tel; h) osztható 21-gyel.

20. a) I; b) H; c) I; d) H; e) I; f) I.

21. a) $a = 2, 3, 4$;
 b) $b = 3, 4, 5$;
 c) $x = 2, 3, 4 \dots$; $y = 1, 2, 3 \dots$;
 d) $k = 2, 3, 4 \dots$; $l = 0, 1, 2 \dots$; $m = 2, 3, 4 \dots$;
 e) $e = 2, 4, 6, 8 \dots$;
 f) $h = 3, 6, 9, 12$; $k = 3, 6, 9, 12$.

Osztok és többszörösök hatványalakból

22.

525	5	A prímtényezők: 3, 5, 7.
105	5	Az összes lehetséges 2 prímtényezős szorzat: $3 \cdot 5 = 15$; $5 \cdot 5 = 25$; $3 \cdot 7 = 21$;
21	3	$5 \cdot 7 = 35$.
7	7	Az összes lehetséges 3 prímtényezős szorzat: $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$; $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$;
1		$5 \cdot 5 \cdot 7 = 175$.

Az 525 osztói: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 25, 35, 75, 105, 175, 525.

980	2	A prímtényezők: 2, 5, 7.
490	5	Az összes lehetséges 2 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 5 = 10$;
98	2	$2 \cdot 7 = 14$; $5 \cdot 7 = 35$; $7 \cdot 7 = 49$.
49	7	Az összes lehetséges 3 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$; $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$;
7	7	$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$; $2 \cdot 7 \cdot 7 = 98$; $5 \cdot 7 \cdot 7 = 245$.
1		Az összes lehetséges 4 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$; $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 = 196$; $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 490$.

A 980 osztói: 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 49, 70, 98, 140, 196, 245, 490, 980.

1260	2	A prímtényezők: 2, 3, 5, 7.
630	5	Az összes lehetséges 2 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 5 = 10$;
126	2	$2 \cdot 7 = 14$; $3 \cdot 3 = 9$; $3 \cdot 5 = 15$; $3 \cdot 7 = 21$; $5 \cdot 7 = 35$.
63	3	Az összes lehetséges 3 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$; $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$;
21	3	$2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$; $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$; $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$; $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$;
7	7	$3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$; $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.
1		Az összes lehetséges 4 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$; $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 315$; $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$. Az összes lehetséges 5 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$; $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 630$.

Az 1260 osztói: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 28, 30, 35, 36, 42, 63, 70, 84, 90, 105, 126, 140, 180, 210, 252, 315, 420, 630, 1260.

23. *A, B, E.*

- 24.** a) $a = 4, 5, \dots$; b) $b = 2, 3, \dots$;
 c) $c = 0, 1, 2, \dots$; d) $d = 4, 5, 6, \dots$;
 e) $e = 0, 1, 2, \dots$; f) $f = 2, 3, 4, \dots$

- 25.** a) 1, 2, 5, 10, 25, 50;
 b) 1, 3, 5, 15;
 c) 1, 3, 7, 9, 21, 63.

26. a) 60; b) 196; c) 1; d) 540; e) 2; f) 45.

- 27.** a) $a = 2$; $b = 1, 2, \dots$;
 b) $c = 2$; $d = 1, 2, \dots$;
 c) $e = 3$; $f = 2$; $g = 4$;
 d) $h = 4$; $j = 1, 2, \dots$; $k = 4, 5, 6$, $m = 2$.

- 28.** a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$; b) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$; c) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$; d) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$;
 e) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$; f) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

- 29.** a) $[12; 35] = 420$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $35 = 5 \cdot 7$.
 b) $[7; 8] = 56$; $7 = 7$; $8 = 2^3$.
 c) $[9; 10] = 90$; $9 = 3^2$; $10 = 2 \cdot 5$.
 d) $[15; 14] = 210$; $15 = 3 \cdot 5$; $14 = 2 \cdot 7$.

- 30.** a) $a = 4$; $b = 2$;
 b) $c = 5$; $d = 1$;
 c) $e = 6$; $f = 4$; $g = 1, 2, 3, 4, 5$;
 d) $h = 4$; $j = 3$; $k = \max 4$; $m = 4$.

31.

216	2	480	2	(216; 480) = 24
108	2	240	5	
54	2	48	2	[216; 480] = 4320
27	3	24	2	
9	3	12	2	
3	3	6	2	
1		3	3	
		1		

32. $1700 \begin{array}{l} | 2 \\ 850 | 2 \\ 425 | 5 \\ 85 | 5 \\ 17 | 17 \\ 1 | \end{array}$ $1530 \begin{array}{l} | 2 \\ 765 | 5 \\ 153 | 3 \\ 51 | 3 \\ 17 | 17 \\ 1 | \end{array}$ $(1700; 1530) = 170$
 $[1700; 1530] = 15\ 300$

33. a) =; b) =.

Két szám szorzata **egyenlő** a két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének a szorzatával.

34. $615 \begin{array}{l} | 5 \\ 123 | 3 \\ 41 | 41 \\ 1 | \end{array}$ $4200 \begin{array}{l} | 2 \\ 2100 | 2 \\ 1050 | 5 \\ 210 | 5 \\ 42 | 2 \\ 21 | 3 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$ $3690 \begin{array}{l} | 2 \\ 1845 | 5 \\ 369 | 3 \\ 123 | 3 \\ 41 | 41 \\ 1 | \end{array}$ $(615; 4200; 3690) = 15$
 $[615; 4200; 3690] = 516\ 600$
 $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$
 $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$
 $3690 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 41$

35. a) $(980; 1225) = 245$ $980 \begin{array}{l} | 2 \\ 490 | 5 \\ 98 | 2 \\ 49 | 7 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$ $1225 \begin{array}{l} | 5 \\ 245 | 5 \\ 49 | 7 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$ $980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$
 $[980; 1225] = 4900$
 $\frac{980}{1225} = \frac{4}{5}$
 $\frac{11}{980} - \frac{3}{1225} = \frac{43}{4900}$

b) $(475; 570) = 95$ $475 \begin{array}{l} | 5 \\ 95 | 5 \\ 19 | 19 \\ 1 | \end{array}$ $570 \begin{array}{l} | 2 \\ 285 | 5 \\ 57 | 3 \\ 19 | 19 \\ 1 | \end{array}$ $475 = 5^2 \cdot 19$
 $[980; 1225] = 2850$
 $\frac{475}{570} = \frac{5}{6}$
 $\frac{8}{475} + \frac{7}{570} = \frac{83}{2850}$

SZÁMELMÉLET

c) $(882; 1134) = 126$

$[882; 1134] = 7938$

$$\frac{882}{1134} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{5}{882} - \frac{13}{1134} = -\frac{23}{3969}$$

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

1134	2
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

$882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

$1134 = 2 \cdot 3^4 \cdot 7$

36. a) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7; 2^3 \cdot 7^2) = 56$, $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 7; 2^3 \cdot 7^2] = 3528$, $\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}{2^3 \cdot 7^2} = \frac{9}{7}$, $\frac{5}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7} + \frac{2}{2^3 \cdot 7^2} = \frac{53}{3528}$;

b) $(2^2 \cdot 5; 3 \cdot 7) = 1$, $[2^2 \cdot 5; 3 \cdot 7] = 840$, $\frac{2^2 \cdot 5}{3 \cdot 7} =$ nem lehet, $\frac{7}{2^2 \cdot 5} - \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{67}{420}$;

c) $(3^2 \cdot 5 \cdot 11; 5^2 \cdot 11) = 55$, $[3^2 \cdot 5 \cdot 11; 5^2 \cdot 11] = 2475$, $\frac{3^2 \cdot 5 \cdot 11}{5^2 \cdot 11} = \frac{9}{5}$, $\frac{2}{3^2 \cdot 5 \cdot 11} + \frac{3}{5^2 \cdot 11} = \frac{37}{2475}$.

37. a) I; b) I; c) I; d) I; e) I; f) H; g) I; h) H; i) I.

38. a) I; b) H; c) H; d) H; e) I; f) I; g) H.

39. a) Páratlan; b) páros; c) páros; d) páratlan; e) páros; f) páratlan; g) páros; h) páros; i) páratlan.

40.

a	$3^4 \cdot 7$	2	$3 \cdot 11$	1
b	3^2	$2^3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7$	5^3
$(a; b)$	3^2	2	3	1
$[a; b]$	$3^4 \cdot 7$	$2^3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7 \cdot 11$	5^3
$a \cdot b$	$3^6 \cdot 7$	$2^4 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7 \cdot 11$	5^3
$(a; b) \cdot [a; b]$	$3^6 \cdot 7$	$2^4 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7 \cdot 11$	5^3

41. Mindkét számnak ugyanannyi osztója van.

$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12; 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$

42. A legnagyobb háromjegyű számnak a természetes számok körében a **0** a legkisebb többszöröse.

SZÁMELMÉLET

43.

8	3	7	0
---	---	---	---

8	7	3	0
---	---	---	---

7	8	3	0
---	---	---	---

7	3	8	0
---	---	---	---

3	8	7	0
---	---	---	---

3	7	8	0
---	---	---	---

44.

5	2	6	2	7	2	3
---	---	---	---	---	---	---

5	5	6	5	7	5	3
---	---	---	---	---	---	---

5	8	6	8	7	8	3
---	---	---	---	---	---	---

45. a) ö; b) p; c) p; d) p; e) ö; f) ö; g) ö; h) ö; i) ö; j) ö.

46. a) 12, 4, 20, 28, 36;
b) 8, 16, 24, 32, 40;
c) Nincs ilyen szám.

47. a) 2520; b) 2520; c) 2520;
d) Ugyanazt a számot kaptuk eredményül.
Ha egy szám osztható 2-vel és 5-tel, akkor 10-zel is osztható.
Ha osztható 10-zel, akkor 2-vel és 5-tel is, ha 9-cel, akkor 3-mal is, ha 8-cal, akkor 4-gyel is, és ha 2-vel és 3-mal, akkor 6-tal is.

48. a) $A = 2^2 \cdot 7$; b) $B = 5$; c) $C = 2^3$; d) $D = 3, 2, \dots$

49. a) Nincs ilyen szám. b) $5 + 2 = 7$; $5 - 2 = 3$.

50.
$$\frac{4168}{11550}$$

51. Ha két természetes szám közül az egyik a másiknak háromszorosa, akkor a két szám összege biztosan osztható 2-vel, 4-gyel és a **kisebb természetes számmal**.

52. Ha két pozitív egész szám közül az egyik a másiknak többszöröse, akkor a két szám legnagyobb közös osztója a **kisebb szám**.

53. Ha két természetes szám mindegyikét elosztjuk a legnagyobb közös osztójukkal, akkor a hányadosok **relatív prím** számok lesznek.

54. Igen, mert a legkisebb közös többszörös tartalmazza a számok összes prímtényezőjét az előforduló legnagyobb kitevőn, a legnagyobb közös osztó pedig a közös prímtényezőket.

55. Nem.

A 2-nél nagyobb prímszámok mindegyike **páratlan** szám, és két **páratlan** szám összege biztosan **páros** szám, ezért az **összeg** összetett szám, ami nagyobb 2-nél.

56. a) $\underbrace{1000\dots08}_{32 \text{ db nulla}}$ A számjegyek összege 9, ezért osztható 9-cel.

b) $\underbrace{1000\dots074}_{8 \text{ db nulla}}$ A számjegyek összege 12, ezért osztható 3-mal és páros szám, ezért osztható 2-vel. Mivel 2-vel és 3-mal is osztható, ezért osztható 6-tal.

c) $\underbrace{1000\dots08}_{24 \text{ db nulla}}$ A számjegyek összege 9, ezért osztható 9-cel. Az utolsó 3 számjegyből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal, ezért osztható 8-cal. Mivel 9-cel és 8-cal is osztható, ezért osztható 72-vel.

57. $A + B = 6$.

58. Az ismeretlen osztó a 24.

59. Az azonos számjegyekből álló háromjegyű számok mindegyike 111 egész számú többszöröse. A $111 = 3 \cdot 37$, ezért osztható 37-tel, így minden ilyen szám osztható 37-tel.

60. A szorzat prímtényezői között csak 2 és 3 szerepel. Ha a szorzat 0-ra végződne, akkor prímtényezői között legalább egyszer szerepelnie kellene az 5-nek is.

61. A művelet elvégzése után 3-mal is osztható számot kapunk, így biztosan nem csak 1-gyel és önmagával osztható az eredmény.

Arányos következtetések, százalékszámítás

1. $K_1 = 16 \text{ cm}, \quad K_1 : K_2 = 16 : 20 = 4 : 5,$
 $K_2 = 20 \text{ cm}, \quad K_2 : K_1 = 20 : 16 = 5 : 4,$
 $T_1 = 16 \text{ cm}^2, \quad T_1 : T_2 = 16 : 25,$
 $T_2 = 25 \text{ cm}^2, \quad T_2 : T_1 = 25 : 16.$

2. a) $5 : 24$; b) $12 : 3$; c) $7 : 6$; d) $8 : 15$; e) $3 : 32$; f) $15 : 4$; g) $72 : 35 : 20$; h) $17 : 4 : 10$.

3.

A 12 a 4-nek	0,8-szerese.
A 10 a 8-nak	$\frac{7}{6}$ -szorosa.
A 10 a 8-nak	$\frac{7}{6}$ -szorosa.
A 3 a 2-nek	3-szorosa.
A 4 az 5-nek	$\frac{5}{4}$ -szerese.
A $\frac{3}{5}$ a $\frac{7}{10}$ -nek	1,5-szerese.
A 8 a 10-nek	$\frac{6}{7}$ -szerese.

4.

x	6	9	0,3	2,1	360	0,75	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{7}$	1203	0,0039
y	10	15	0,5	3,5	600	1,25	$1\frac{1}{4}$	$\frac{10}{7}$	2005	0,0065

5. a) 223, 323, 523, 723, 246, 346, 546, 746, 269, 369, 569, 769.

b) Összesen **12** szám felelt meg a feltételnek.

c) A feltételnek megfelelő összes szám közül **4** páros szám.

6. a) 0,63; b) 63,5; c) 17,5; d) 118; 212,4.

7. A kisebb szám **3,9**, a nagyobb szám **6,5**.

8. A kisebb szám **7,8**, a nagyobb szám **18,2**.

ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

9. A nagyobb szám $\frac{3}{4}$.

10. A kisebb szám $\frac{1}{2}$.

11.a) $a = 21$ cm, $b = 28$ cm; b) $T = 588$ cm².

12.a) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm; b) $K = 70$ cm.

13. A háromszög belső szögei 40° , 90° , 50° .

14. A háromszög belső szögei 45° , 45° , 50° vagy $67,5^\circ$, $67,5^\circ$, 45° .

15. A három szám **26**, **65**, **104**.

16. A rövidebb rúd hossza **420 mm**, a hosszabb rúd hossza **900 mm**.

17. Kata **72**, Piri **45**, Juli **105** fényképet készített.

18. Dénes **56 000 Ft-ot**, János **70 000 Ft-ot**, Lajos **49 000 Ft-ot** kapott a pénzből.

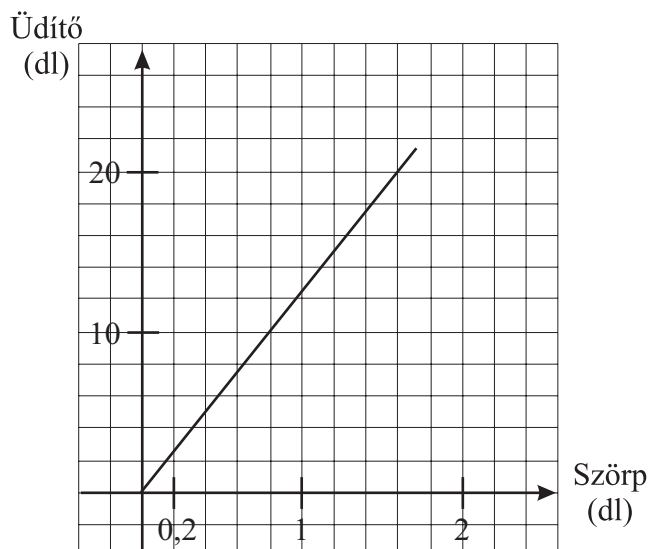
19.a) 15 zsák liszt tömege 420 kg; b) 1372 kg liszt 49 zsákban fér el.

20. a) 7 hektár területéhez **875 kg** műtrágya szükséges.
b) 1750 kg műtrágya **14 ha** területre elegendő.

21.a)

Szörp mennyisége (dl)	0,2	0,08	0,8	1,2	1,6	5	7,5	10
Üdítő mennyisége (dl)	2,5	1	10	15	20	62,5	93,75	125

b)



22.

Eltelt idő t (óra)	0,5	1	1,5	2	3	4	4,5	5
Megtett út s (km)	2	4	6	8	12	16	18	20
$\frac{s}{t} \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$	4	4	4	4	4	4	4	4

23. Ha 7 óra alatt szeretné ugyanezt az utat megtenni, akkor $20 \frac{4}{7} \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel kell haladnia.

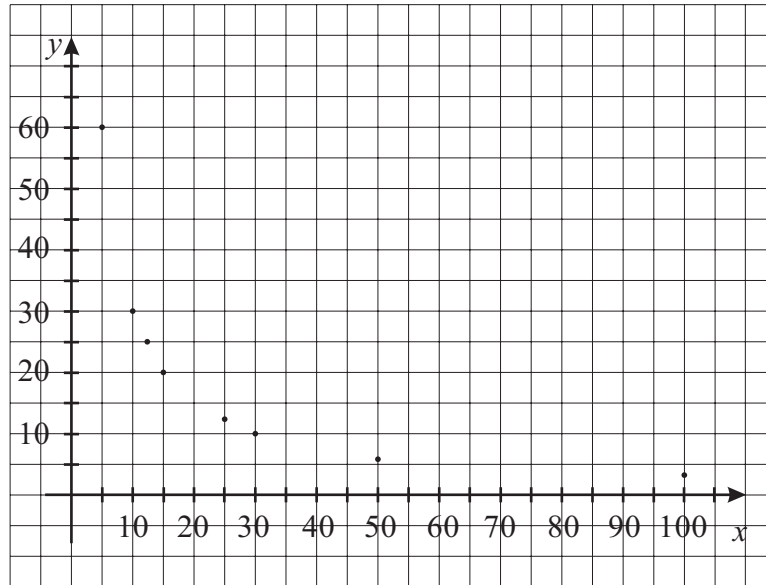
24. Nyolc fő esetén fejenként **2 100 Ft** lenne a bérleti díj.

25. Ha 18 cm magas lépcsőket alkalmaznak, akkor **80** lépcső vezetne a kilátó tetejére.

26. a)

Egy üveg űrtartalma x (liter)	100	50	30	25	20	12	10	5
A szükséges üveg mennyisége y (darab)	3	6	10	12	15	25	30	60
$x \cdot y$	300	300	300	300	300	300	300	300

b)



27.

Az ágyás egyik oldala a (méter)	0,5	1	1,5	2	3	4	5
Az ágyás másik oldala b (méter)	48	24	16	12	8	6	4,8
$a \cdot b$	24	24	24	24	24	24	24

Arányossági feladatok

- 28.** a) Az élek hossza **16,8 cm, 21 cm, 37,8 cm**.
 b) A téglatest felszíne **3563,28 cm²** és térfogata **13335,84 cm³**.
- 29.** a) Az élek hossza **40 cm, 80 cm, 180 cm**.
 b) A téglatest felszíne **352 dm²** és térfogata **576 dm³**.
- 30.** a) A háromszög oldalai **5 cm, 6 cm, 6,5 cm** hosszúak.
 b) A háromszög kerülete **15 cm**.
 c) A háromszög területe **7,5 cm²**.
- 31.** A 8 doboz festék **21 m** hosszú falfelületre elegendő.
- 32.** 14 munkás 3 óra alatt **1008** munkadarabot készít el.
- 33.** A második ládában **20** sorba helyezték el a dobozokat.
- 34.** 8 csapon keresztül 900 liter vizet **1,5 óra** alatt gyűjthetünk.

- 35.** a) A fiúk száma **12**.
 b) A fiúk száma **9**.
 c) A fiúk száma **9**, a lányok száma **15**.
- 36.** a) $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_1 : a_2 = 1:3$.
 b) $A_1 = 96$ cm², $A_2 = 864$ cm², $A_1 : A_2 = 1 : 9$.
 c) $V_1 = 64$ cm³, $V_2 = 1728$ cm³, $V_1 : V_2 = 1 : 27$.
- 37.** a) A telek szélességét ábrázoló szakasz hossza **10,2 cm**.
 b) A tervrajz méretaránya: **1 : 500**.
 c) A telek területe: $T_1 = 4435$ m².
 A telek ábrájának területe: $T_2 = 173,4$ cm².
 A két terület aránya: $T_1 : T_2 = 250\ 000 : 1$.
- 38.** A szoba padlójának lakkozásához **2,835 kg** anyagot kell vásárolni.
- 39.** A második kertben a fákat **27** sorba ültették el.
- 40.** A szivattyút **112 órát** kell üzemeltetnünk.
- 41.** a) 12 ember napi 4 órai munkával **24** nap alatt végezné el ezt a feladatot.
 b) Napi 8 órai munkával **16** ember végezné el ezt a feladatot 9 nap alatt.
- 42.** Kati **1900** forintot, Ede **625** forintot, és Lilla **875** forintot gyűjtött.
- 43.** 1800 liter víz gyűjtéséhez **7,5** órára van szükség.
- 44.** A versenyre **156** korzójegyet, **468** tribünjegyet, és **780** állójegyet adtak el.

Törtész számítás, százalékszámítás

- 45.** A kérdésekre egy-egy szorzat felírásával válaszolj, majd számítsd ki a keresett számot!

a) $15 \cdot \frac{3}{5} = 9$, $15 \cdot \frac{5}{3} = 25$, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$, $15 \cdot \frac{5}{3} = 25$;

b) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{16} = 1\frac{11}{16}$, $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{27}$;

c) $3,2 \cdot 0,8 = 2,56$, $3,2 \cdot \frac{10}{8} = 4$, $0,8 \cdot \frac{10}{32} = 0,25$.

- 46.** A keresett szám a **4**.
- 47.** a) -14 ; b) -6 ; c) -96 .

- 48.** a) 115,2; 2000; 5%; 2000%.
 b) 24,5; 5000; 2%; 5000%.
 c) 180; 125; 80%; 125%.
- 49.** a) A nagyobb szám **-600**, a kisebbnél **600-zal** nagyobb.
 b) A nagyobb szám **-15**, a kisebbnél **5-tel** nagyobb.
 c) A nagyobb szám **-32**, a kisebbnél **8,5-del** nagyobb.
- 50.** a) Az eddig megtett út **96** kilométer.
 b) A teljes útból még **144** kilométer van hátra.
 c) A vonat óránként **60** kilométer utat tesz meg.
 d) Az egész út megtételéhez **4 órára** van szükség.
- 51.** A kötélteljes hossza **32,5** méter.
- 52.** a) A habarcs $\frac{18}{29}$ része homok, $\frac{7}{29}$ része mész és $\frac{4}{29}$ része víz.
 b) A habarcs kb. 62 százaléka homok, kb. 24 százaléka mész és kb. 14 százaléka víz.
- 53.** a) A tervezett túra **53,5** kilométer hosszú volt.
 b) A második nap **22,47** kilométert tettünk meg.
 c) Az első nap a tervezettnél **11,77** kilométerrel kevesebb utat tettünk meg.
- 54.** A vásárló **9930** forintot spórolt meg.
- 55.** a) **70,2** négyzetméterre ültettek paprikát.
 b) A paprikával beültetett rész a teljes kert **23,4** százaléka.
- 56.** a) A gép a két árváltoztatás után **24 828,5** forintba kerül.
 b) A változás **2,25** százalékos.
- 57.** a) Az első árváltozás **3,75** százalékos.
 A második árváltozás **3,6** százalékos.
 b) Az első árváltozás **25** százalékos.
 A második árváltozás **20** százalékos.
- 58.** a) A könyv eredeti áram **2100** forint.
 b) A figyelmes vásárló **735** forintot spórolt.
- 59.** a) A téglatest éleinek hossza **12 cm, 16,8 cm, 9 cm**.
 b) A test felszíne **6,6** százalékkal változott meg.
 c) A test térfogata **5** százalékkal változott meg.

Algebrai kifejezések

- 1.** a) $a + b$; b) $4a - b$; c) $(a + b) \cdot 4$; d) $\frac{a}{3} + 8$; e) $\frac{b-5}{4}$; f) $0,54c$;
 g) $\frac{2}{3}x + y$; h) $x - 0,25y$; i) $(x + y)^2$; j) $x + y^2$; k) $(x^2 - 3) \cdot 0,6$.

2.

Algebrai kifejezés	$\frac{2}{5}b^2$	$3a$	$0,24x$	$-2,4y$	$-c^3$	$\frac{4d}{7}$	$\frac{e}{9}$	$-\frac{f}{2}$	ab
Együttható	$\frac{2}{5}$	3	$0,24$	$-2,5$	-1	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{2}$	1
Változó	b^2	a	x	y	c^3	d	e	f	ab

- 3.** a) 32; b) -23; c) -44; d) 7,48; e) $-\frac{11}{6}$;
 f) $2\frac{1}{4}$; g) $32\frac{11}{36}$; h) -0,88; i) -204; j) $-\frac{4}{5}$.

- 4.** $7a$ -val egyenemű: $-\frac{1}{4}a$; $0,3a$; $14a$;
 $5b^2$ -tel egyenemű: $2b^2$; $2\frac{3}{5}b^2$; $\frac{b^2}{3}$;
 $0,2ab$ -vel egyenemű: $3ab$; $\frac{5ab}{7}$; $1,8ab$; $-ba$;
 a^2b -vel egyenemű: $16a^2b$.

- 5.** a) Például: x^3 , $-x^3$, $\frac{2}{7}x^3$, $\frac{x^3}{8}$, $0,3x^3$
 b) Például: a^2 , $-2a^2$, $\frac{a^2}{8}$, $0,1a^2$, $\frac{5a^2}{3}$;
 c) Például: x^2y^3 , $-x^2y^3$, $3x^2y^3$, $0,6x^2y^3$, $\frac{12x^2y^3}{7}$;
 d) Például: b^4c , $-b^4c$, $5b^4c$, $9cb^4$, $-\frac{2}{3}cb^4$.

- 6.** a) $a + a + a + a + a + a = 6a$; b) $b + c + b + c + b + c + b + c + b = 5b + 4c$;
 c) $2d + 3d - 6d = -d$; d) $1,2e + 2,5e - 0,24e - 1,16e + 3,3e = 5,6e$;
 e) $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x + \frac{7}{12}x = \frac{16}{12}x = \frac{4}{3}x$; f) $2d^2 - 1\frac{1}{2}d^2 - 3\frac{1}{2}d^2 = -3d^2$;
 g) $0,8y^3 - 1,2y^3 - 0,1y^3 = 0,8y^3 - 1,3y^3 = (-0,5y^3)$; h) $1,5x^2y - 0,9x^2y + 2x^2y = 2,6x^2y$.

ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK

7. a) $14a^2 + a$; b) $-3b - 8$; c) $2c^2 - 3d + d^3$; d) x^2 ; e) $1,7e^3$; f) $4ab - ab^2 + 2a^2b$;
g) $1a^2bc - 4,2abc^2$; h) $-2a^2 - 0,8a$; i) $\frac{13}{10}yx^2 - \frac{11}{12}x$.

8. a) $10a - 2b - 10c$; b) $2x + y + 16z$; c) $\frac{7}{6}a + \frac{7}{6}b - \frac{1}{2}c$; d) $0,8xy - 3xz - 1,2yz$;
e) $1,85a^2 + 4b - 0,6ab$; f) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{15}y - z^2$.

9. $A + B - C = -4x^2 + 2xy - 4y^2 - 3$; $A - B + C = 6x^2 - 9xy + 2y^2 + 13$; $-A + B + C = xy + 8y^2 - 5$.

10. a) -5 ; b) $2,5$; c) $\frac{1}{3}$; d) $0,5$; e) -2 ; f) $-0,2$; g) -5 ; h) $-\frac{1}{7}$.

11. a) x^9 ; b) y^6 ; c) a^{10} ; d) a^8b^4 ; e) $\frac{9}{16}x^2$; f) $\frac{8}{27}x^6$; g) $81a^8b^4$; h) $64a^6b^9$; i) y^4 ; j) y^{14} .

12. a) $-6ac$; b) $12x^3$; c) $2y^2$; d) $4a^2b$; e) cd ; f) $-0,006ef$; g) $\frac{1}{6}x^3y^2$; h) $-ab^2c$.

13. a) $3a^2$; b) $3a$; c) $4a^2$; d) $-\frac{3}{2}b$; e) $-0,5ab$; f) $0,6b^2c$; g) $-\frac{1}{2}a^2$; h) $\frac{a}{b}$.

14.

\cdot	$-6ab$	$1,4a^2$	$5ab^3$	$8a^2b$	$-10a^3b^2$
$4b$	$-24ab^2$	$5,6a^2b$	$20ab^4$	$32a^2b^2$	$-40a^3b^3$
$0,6a^2$	$-3,6a^3b$	$0,84a^4$	$3a^3b^3$	$4,8a^4b$	$-6a^5b^2$
$\frac{1}{4}ab^2$	$-\frac{3}{2}a^2b^3$	$0,35a^3b^2$	$\frac{5}{4}a^2b^5$	$2a^3b^3$	$-2,5a^4b^4$

15.

osztandó osztó	$-6ab$	$1,4a^2$	$5ab^3$	$8a^2b$	$-10a^3b^2$
$2a$	$-3b$	$0,7a$	$2,5b^3$	$4ab$	$-5a^2b^2$
$0,5b$	$+12a$	$\frac{-2,8a^2}{b}$	$-10ab^2$	$-16a^2$	$20a^3b$
$\frac{1}{10}ab$	-60	$\frac{14a}{b}$	$50b^2$	$80a$	$-100a^2b$

16. a) $20x + 10$; b) $12y + 28$; c) $20a - 60ab$; d) $-1,2x - 1,84$; e) $\frac{4}{75}c + \frac{1}{10}$; f) $\frac{5a}{14} - \frac{10b}{3}$.

17. a) $-12a - 6a^2$; b) $20b^3 - 30b^2$; c) $11,1c^4d + 0,75cd^2$;
 d) $-0,07x^3y^3 + 39,2xy^4$; e) $\frac{1}{6}e^4f^5 + \frac{1}{4}ef^4$; f) $-\frac{1}{4}a^3b^3 + 10a^4b^2$.

18. a) $-3a - 8b$; b) $6x - 4y + 10z$; c) $27a - 14c - 13$; d) $3x^2 - 14y^2 + 13xy + 6x + 6y$;
 e) $2ab + 2b^2$; f) $-x^2 - 20xy$; g) $0,7a^2 - 0,4b^2 + 19,58ab$; h) $-4,3c^3 + 4c^3d$;
 i) $\frac{3}{10}e^2 + \frac{1}{15}e$; j) $-12\frac{1}{4}y + 19\frac{5}{7}$; k) $6a - 41b$.

19. a) $2x - 4y + z$; b) $-2a - 3b + 4c$; c) $2c^2 + c - 0,3$; d) $-0,7 + 3d^3 - 0,25d$;
 e) $\frac{1}{12}e + \frac{2}{15} - \frac{1}{18}e^3$; f) $\frac{5f}{12} + \frac{g}{2} - \frac{3}{4}$.

20. a) $8a - 6$; b) $-2b^2 + 3$; c) $-3 + 2c$; d) $0,08d - 0,6d^3$; e) $\frac{6}{5} - \frac{1}{3}f$; f) $\frac{5}{6}x^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{8}{3}$.

21. a) $\frac{5a+24}{60}$; b) $\frac{60-13b}{30}$; c) $\frac{11c+4}{14}$; d) $\frac{10d^2+3d+30}{60}$;
 e) $\frac{9x-14}{12}$; f) $\frac{-7y+5}{6}$; g) $\frac{-26z+19}{10}$.

22. a) $3(a - b)$; b) $a(5x - y)$; c) $6y(x - 1)$; d) $x(2y + 1)$; e) $48ab$; f) $40xy$; g) $d(25c - 2)$;
 h) $2b(15a - 1)$; i) $45ab$; j) $6ab$; k) $24xy$; l) $45ab$; m) $-195xy$;
 n) $ab(4b^2c - 2 + c - a)$; o) $\frac{2}{9}x^2y(xy - 2y - 3)$.

Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása

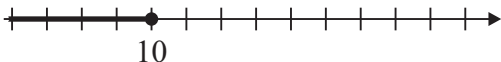
1. Azonosságok: a), c), d).

2. Azonos egyenlőtlenségek: a), d), e).

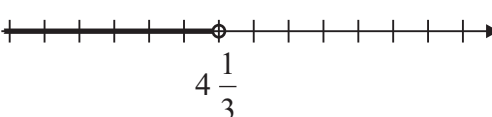
3. a) $x = 12$; b) $y = 14$; c) $z = 18$; d) $a = -4$; e) $b = 2$; f) $c = 2$.


4. a) $a = -11$; b) $b = 1$; c) $c = -2$; d) $d = 3$; e) $e = 15$; f) $f = 4$.

5. a) $a = 7$; b) $x = 1$; c) $x = 1$; d) $y = -11$; e) $x = -10$; f) $x = 2$; g) $x = 2$.

6. a) $x \leq 10$, 

b) $y \geq 4$, 

c) $z < \frac{26}{6} = 4\frac{1}{3}$, 

d) $a > 4$, 

7. $a = \frac{T}{b}$, $a = \frac{V}{b \cdot c}$;


$b = \frac{K}{2} - a$, $m = \frac{\Delta E}{c \cdot \Delta T}$;

$c = \left(\frac{A}{2} - ab \right) : (a + b)$;

$e = \frac{2T}{f}$;

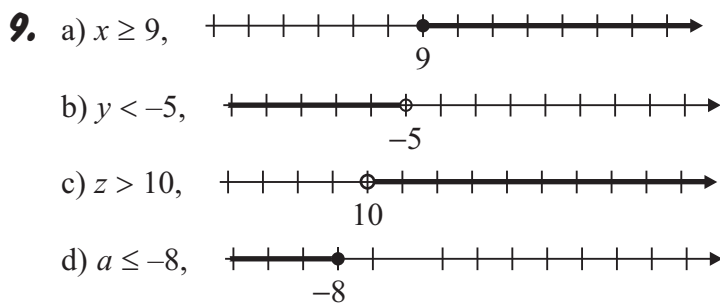
$m = \frac{2T}{a + c}$, $c = \frac{2T}{m} - a$.

8. a) $a < 10$, 

b) $b \leq 4$, 

c) $c > 7$, 

d) $d \leq 3$, 



10. a) $a = 24$; b) $b = 70$; c) $c = 144$; d) $d = 24$; e) $x = 14$; f) $y = 9$;
g) $x = 0,5$; h) $x = 12$.

11. a) $e > 30$; b) $y \geq 40$; c) $x \leq 24$; d) $f > 2,4$; e) $x > 10$; f) $y \leq -4$;
g) $x \leq -1$; h) $x < 1\frac{26}{31}$.

12. $x = 2,8$. a) $\{2,8\}$; b) üres halmaz; c) üres halmaz.

13. $6 \leq 8$. a) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; b) pozitív természetes számok halmaza; c) természetes számok halmaza; d) egész számok halmaza.

14. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; b) $y_1 = -2$, $y_2 = -5$, $y_3 = 10$; c) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = -3$;
d) $b_1 = 0$, $b_2 = 8$, $b_3 = -30$, e) $c_1 = 3$, $c_2 = -\frac{1}{2}$.

Szöveges feladatok

15. Az osztályba 18 lány és 13 fiú jár.

16. A gondolt szám 14.

17. Az egyik kannában 14 liter, a másikban 7 liter víz van.

18. Az első dobozban 45, a másodikban 90, a harmadikban 15 labda van.

19. 8 ötödikes, 11 hatodikos, 16 hetedikes és 8 nyolcadikos gyerek jelentkezett a táborozásra.

20. A háromszög szögei 39° , 39° , 102° .

21. A háromszög szögei 51° , 51° , 78° .

22. A háromszög szögei a) 52° , 52° , 76° ; b) 44° , 68° , 68° .

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

23. A háromszög szögei a) $76^\circ, 76^\circ, 28^\circ$; b) $44^\circ, 44^\circ, 92^\circ$.

24. A háromszög szögei $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

25. A két szám 8 és 20.

26. A sorban összesen 9 ember állt, Pali előtt állt 3 fő.

27. 25 évvel ezelőtt volt az apa kilencszer idősebb a fiánál.

28. Összesen 450 fabatkám volt, a ceruza 90 fabatkába került.

29. A két lécdarab 90 cm és 150 cm hosszú.

30. A téglalap területe 108 cm^2 .

31. A háromszög oldalai 9 dm, 5 dm és 12 dm hosszúak.

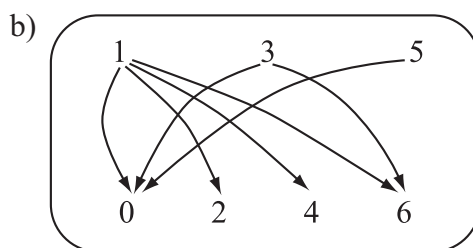
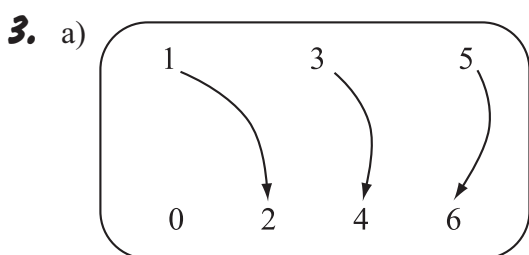
32. A legnagyobb szám 670.

33. A legkisebb szám 396.

34. Almából 5 kilogrammot, körtéből 3 kilogrammot vettem.

Függvények

- 1.** a) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
b) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
c) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
d) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.
- 2.** a) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
b) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.
c) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
d) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.
e) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
f) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
g) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek nincs párja a képhalmazban.
h) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.



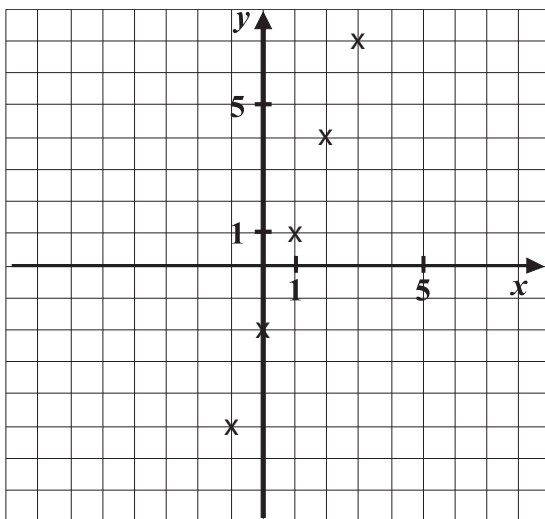
Az a) hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.

A b) hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.

FÜGGVÉNYEK

4.

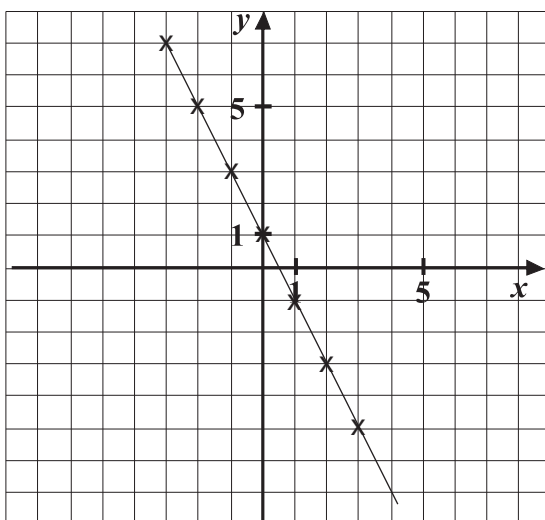
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = 3x - 2$	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10



5. $h(x) = \frac{1}{2}x + 1.$

x	-4	-2	0	2	4	6
$h(x)$	-1	0	1	2	3	4

6. $g(x) = -2x + 1.$



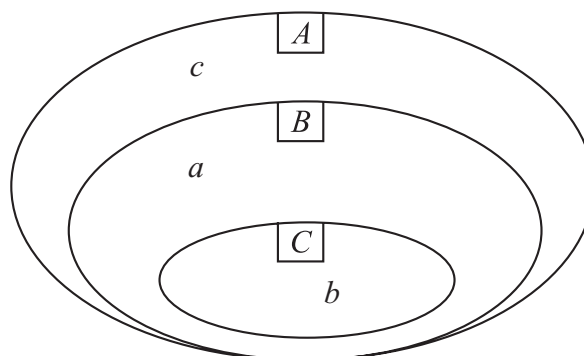
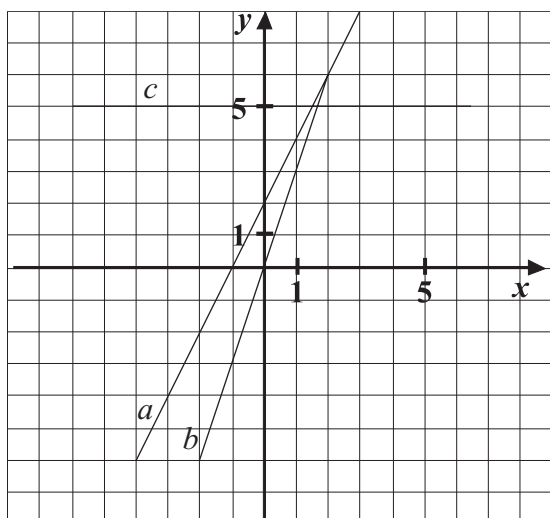
FÜGGVÉNYEK

7.

x	-1	0	1
$a(x)$	0	2	4

x	-1	0	1
$b(x)$	-3	0	3

x	-3	-2	-1
$c(x)$	5	5	5

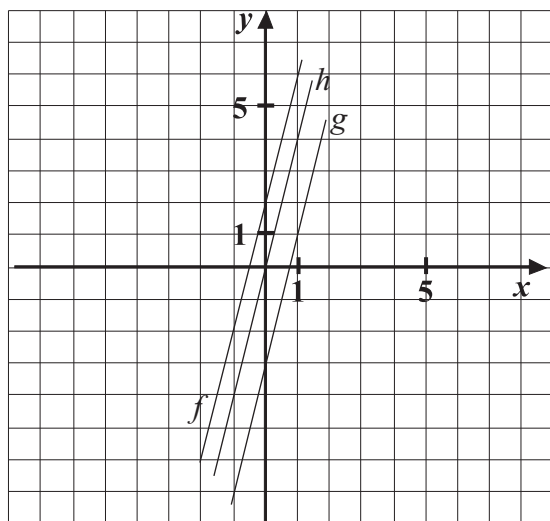


8.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-6	-2	2	6

x	-2	-1	0	1
$h(x)$	-8	-4	0	4

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	-11	-7	-3	1



Az egyenesek párhuzamos helyzetűek.

Meredekségük azonos, de a koordinátatengelyeket más-más pontban metszik.

9. $f(x)$ meredekség: 2, $g(x)$ meredekség: $\frac{2}{3}$, $h(x)$ meredekség: -2, $i(x)$ meredekség: -6,
 $k(x)$ meredekség: 2, $l(x)$ meredekség: $\frac{2}{3}$.

$f(x)$ grafikonja párhuzamos a $k(x)$ grafikonjával.

$g(x)$ grafikonja párhuzamos a $l(x)$ grafikonjával.

FÜGGVÉNYEK

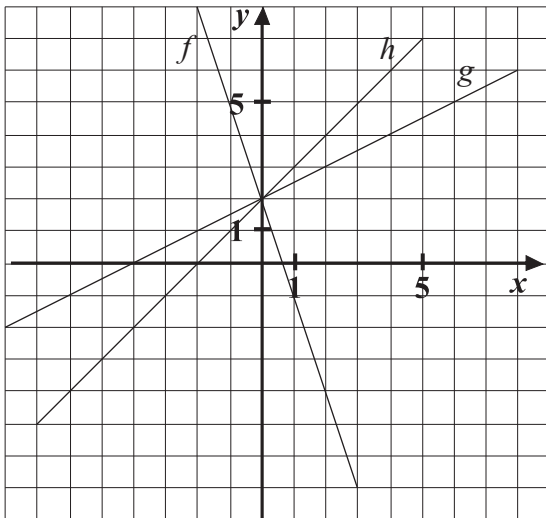
10. $a_1(x) = 4x,$ $a_2(x) = 4x + 5,$ $a_3(x) = 4x - 7,$
 $b_1(x) = -3x,$ $b_2(x) = -3x + 4,$ $b_3(x) = -3x + 1,$
 $c_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2,$ $c_2(x) = -\frac{3}{4}x,$ $c_3(x) = -\frac{3}{4}x - 7.$

11.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	8	5	2	-1

x	-2	-1	0	1
$h(x)$	0	1	2	3

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	1	1,5	2	2,5

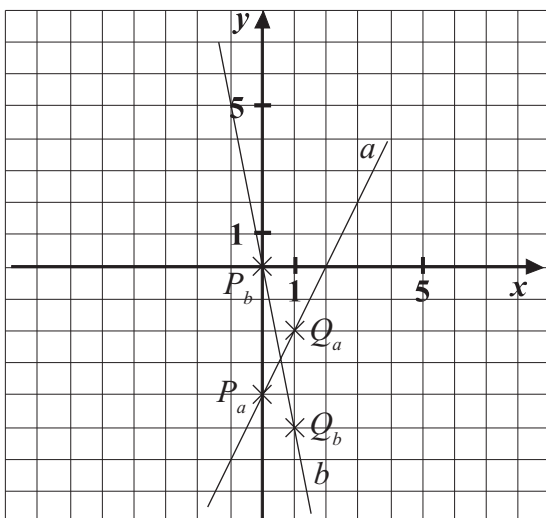


Mindhárom függvény közös pontja $(0; +2)$.

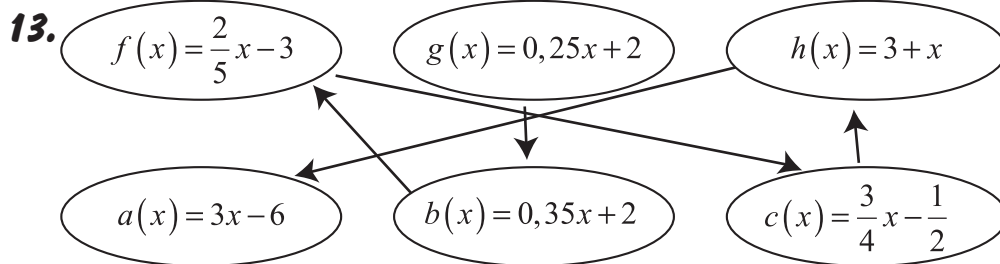
Mindhárom függvény lineáris, de meredekségük különböző.

A $h(x)$ függvény nagyobb szöget zár be az x tengellyel. A $h(x)$ függvénynek nagyobb a meredeksége.

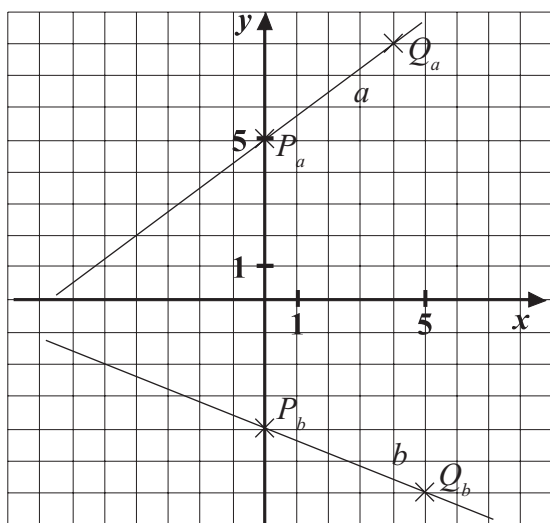
12. $P_a(0; -4),$ $Q_a(1; -2),$
 $P_b(0; 0),$ $Q_b(1; -5).$



FÜGGVÉNYEK

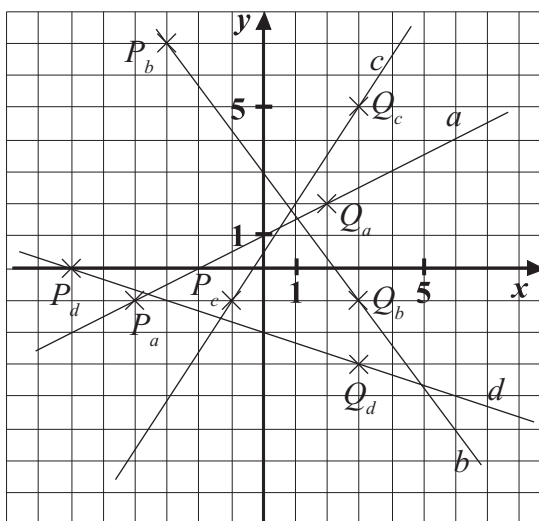


- 14.** $P_a(0; 5)$, $Q_a(4; 8)$,
 $P_b(0; -4)$, $Q_b(5; -6)$.

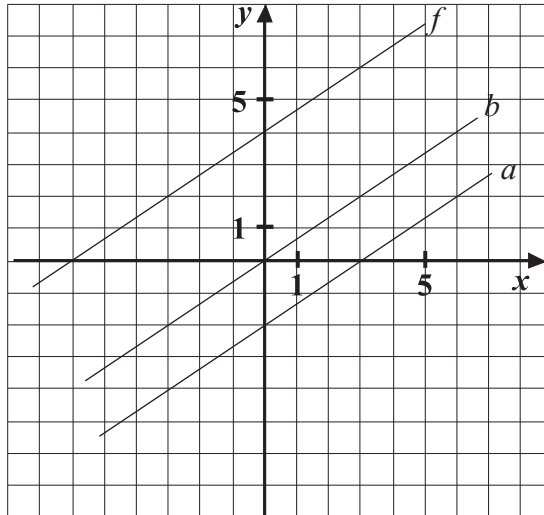


- 15.** $a(x) = x + 4$, $b(x) = -x + 2$, $c(x) = -2$, $d(x) = \frac{1}{3}x$,
 $e(x) = -\frac{3}{2}x - 4$, $f(x) = \frac{2}{5}x + 3$, $g(x) = \frac{3}{2}x$, $h(x) = 4$.

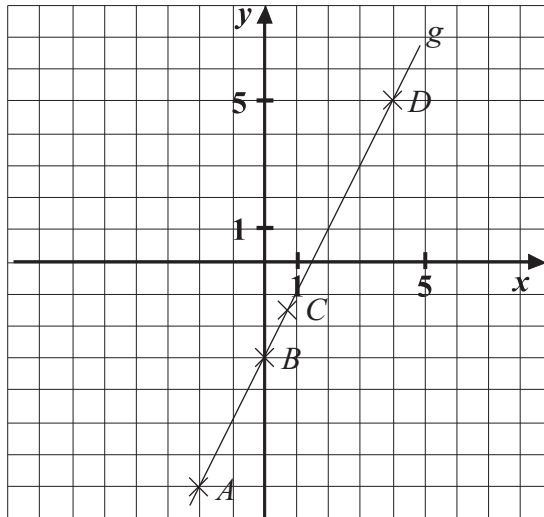
- 16.**
- $a(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $b(x) = -\frac{4}{3}x + 3$,
 $c(x) = 1,5x + 0,5$, $d(x) = -\frac{1}{3}x - 2$.



17. $a(x) = \frac{2}{3}x - 2,$
 $b(x) = \frac{2}{3}x.$

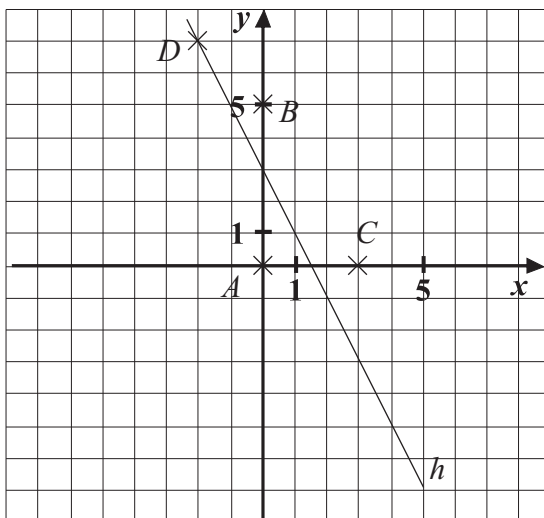


18. $A(-2; -7),$
 $B(0; -3),$
 $C\left(\frac{3}{4}; -1,5\right),$
 $D(4; 5),$
 $E(15; 27).$



19.

x	-2	-1	-0,5	1,5	1,5	4	3	-4
$h(x)$	7	5	4	0	0	-5	-3	11

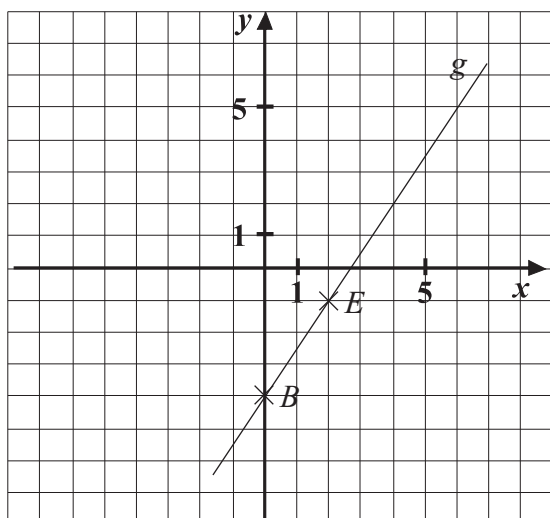


Alatta: $A, E.$

Rajta: $D, F.$

Fölötte: $B, C, G, J, K.$

20.



a) $A(-3; -8,5), B(0; -4), C(12; 14),$

$D\left(\frac{8}{3}; 0\right), E(2; -1), F(10; 11);$

b) $A_a(-3; -10), B_a(0; -6), C_a(12; 10),$

$D_a(3; 0), E_a(4; -1), F_a(15; 11);$

c) $A_f(-3; -0), B_f(0; 0), C_f(12; 20),$

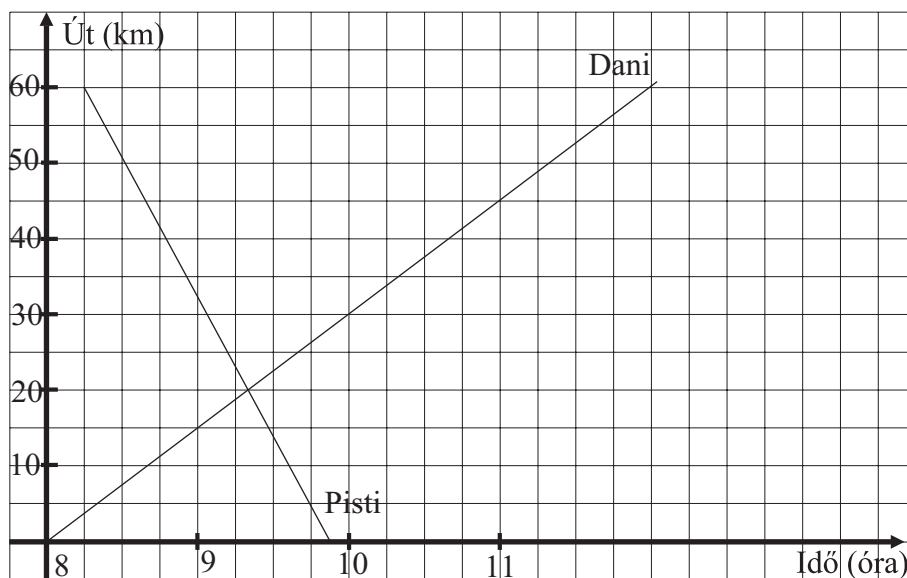
$D_f(2; 0), E_f(1; -1), F_f(2; 11).$

21. a) $a(x) = 3x;$ b) $b(x) = \frac{1}{3}x;$ c) $c(x) = 4x + 2;$ d) $d(x) = \frac{1}{4}x + 2;$

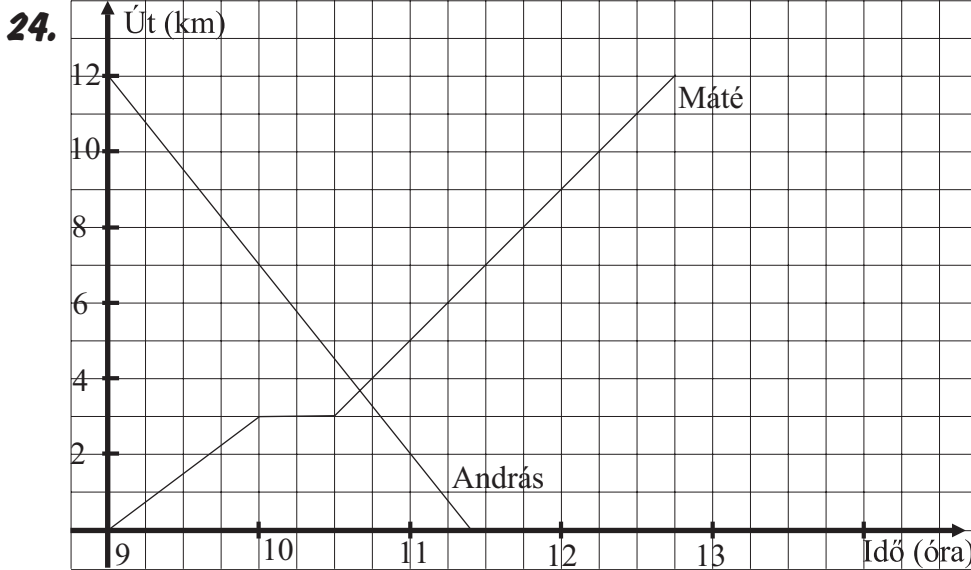
e) $e(x) = -2x + 3;$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3;$ g) $g(x) = -3x - 4;$ h) $h(x) = -\frac{1}{3}x - 4.$

22. I, H, I, H, H, H, H.

23.



A két jármű **9 óra 20 perckor** találkozott, a kerékpáros kiindulási helyétől **20** kilométer távolságban.



A két barát **10 óra 40 perckor** találkozott, **András** tett meg hosszabb utat.

25. 1. grafikon:

Mindkét gyalogos egyszerre (a 0. órában) indult el.

Egymástól 40 km távolságra voltak.

8 óráig tartott az útjuk.

Az *a* gyalogos tartott pihenőt. A pihenő 120 percig tartott.

5 órakor találkoztak az *a* indulási helyétől 15 km-re, és a *b* indulási helyétől 25 km-re.

A sebesség a pihenés után volt nagyobb.

2. grafikon:

Az *a* gyalogos a 0. órában, a *b* gyalogos 30 perccel később indult el.

3 óráig tartott az útjuk.

A *b* gyalogos nem tartott pihenőt.

A *b* gyalogosnak nagyobb volt az átlagsebessége.

2 óra 10 perckor találkoztak az indulási helytől kb. 6 km távolságban.

26. a) 1, 3, 5, 7, **9, 11, 13, 15, 17**;

b) 5, 6, 8, 11, **15, 20, 26, 33, 41**;

c) -1, 2, 7, 14, **23, 34, 47, 62, 79**;

d) 0, 3, 8, 15, **24, 35, 48, 63, 80**;

e) 1, 3, 7, 15, **31, 63, 127, 255, 511**.

27. a) 2, 6, 18, 54, 162, 486;

b) 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$;

c) -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18;

d) 23, 16, 9, 2, -5, -12, -19;

e) $-\frac{1}{30}, \frac{2}{5}, \frac{17}{10}, \frac{56}{10}, \frac{173}{10}, \frac{524}{10}, \frac{1576}{10}$.

28. a) 12, 7, 2, -3, -8, -13, -18;

b) nem számtani sorozat;

c) nem számtani sorozat;

d) 0,9, 1,6, 2,3, 3, 3,7, 4,4, 5,1;

e) nem számtani sorozat;

f) -154, -131, -108, -85, -62, -39, -16;

g) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}$;

h) $\frac{1}{4}, -\frac{5}{12}, -1\frac{1}{12}, -\frac{21}{12}, -\frac{29}{12}, -\frac{37}{12}, -\frac{45}{12}$.

29. a) 7, 15, 23, 31, 39, 47; b) 162.

30. 7,4, 5,8, 4,2, 2,6, 1, -0,6.

31. $a_{25} = 317, S_{25} = 4025$.

32. $a_{25} = -892, S_{25} = -23772$.

33. $a_{20} = 14\frac{13}{20}, S_{20} = 15\frac{1}{20}$.

34. $a_{20} = -23,6, S_{20} = -187$.

35. $a_{42} = 257,5, S_{42} = 5304,6$.

36. $a_1 = -30, S_{10} = -30$.

37. $a_1 = 0,15, S_{65} = 529,75$.

38. $a_1 = \frac{3}{7}, S_{25} = 110\frac{5}{7}$.

39. $a_1 = 9, d = 7, S_{10} = 405$.

40. $a_{13} = -20, d = -3, S_{10} = -49$.

A 12. és a 14. elem átlaga a -20, amely megadja a 13. elemet.

FÜGGVÉNYEK

41. $a_1 = 205$, $d = 7$, $a_{100} = 898$, $S_{10} = 55150$.

42. A keresett összeg **1683**.

43. A keresett összeg **1188**.

44. A keresett összeg **999**.

45. A keresett összeg **82350**.

46. a) A háromszög oldalai **7 cm, 12 cm, 17 cm**. b) A megoldások száma **6**.

47. A négyszög szögei **39° , 60° , 81°** .

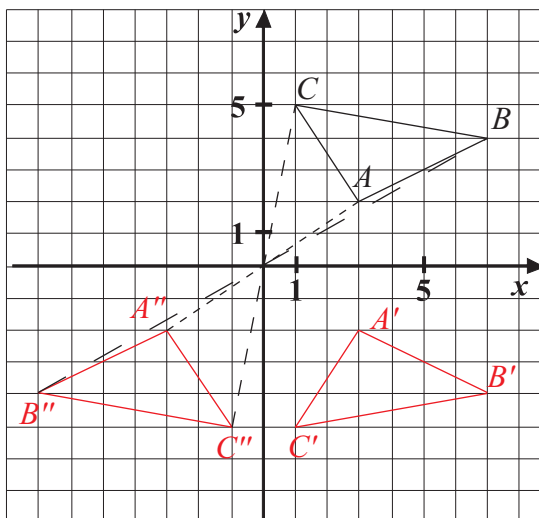
48. A körök mentén összesen **147** gyerek állt.

49. A két fiú közül **Béla** spórol több pénzt, **80** forinttal. A társasjáték **5520** forintba kerül.

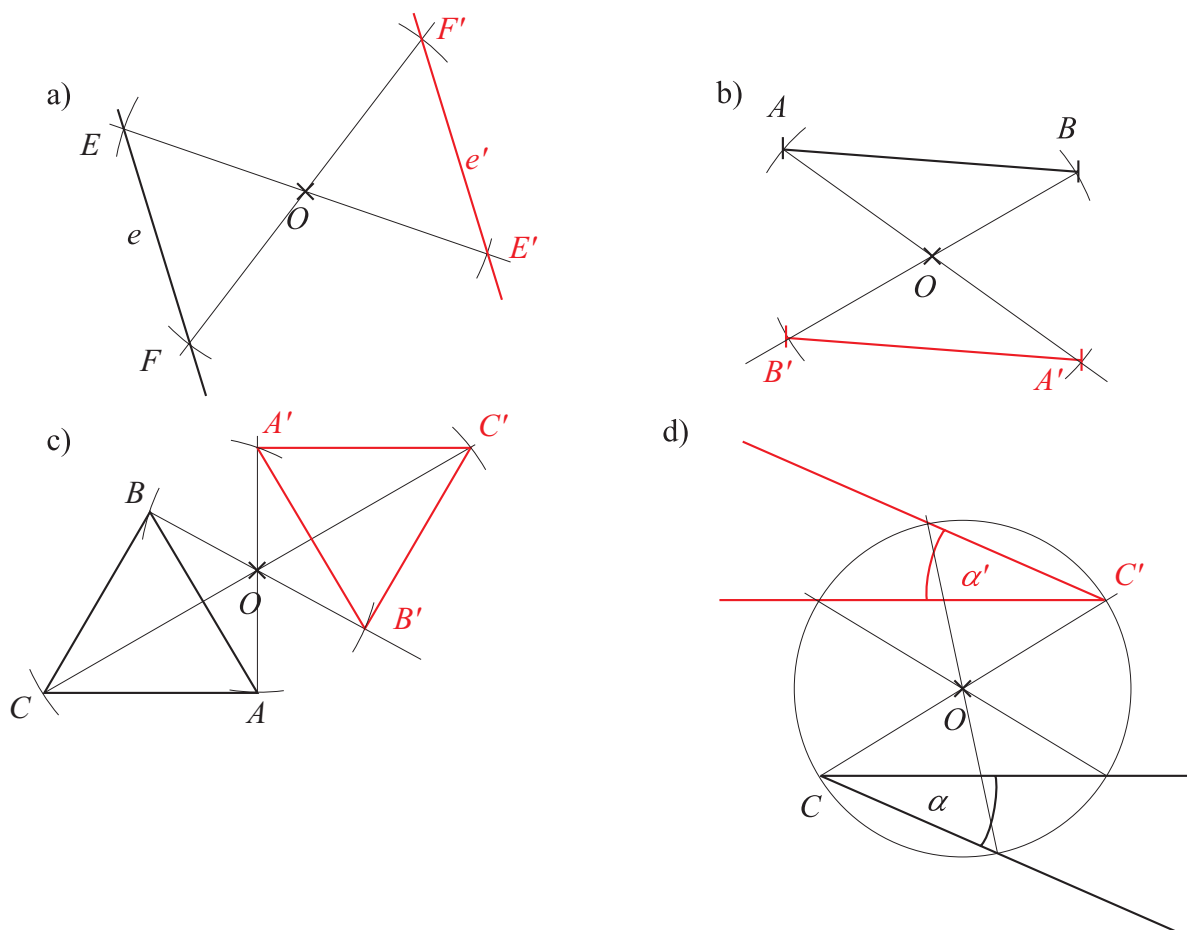
50. A piramis területe **$40,5 \text{ cm}^2$** .

Középpontos tükrözés

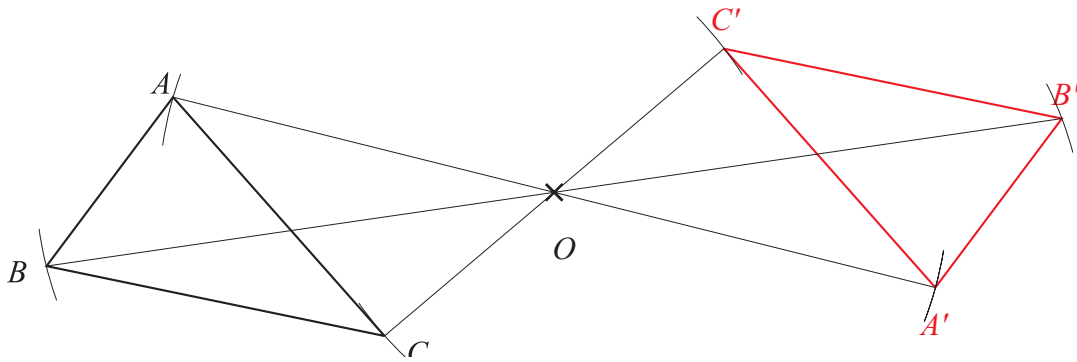
1. A szakaszok egy pontban az origóban metszik egymást. Ez a pont mindhárom szakasz felező pontja.



2.

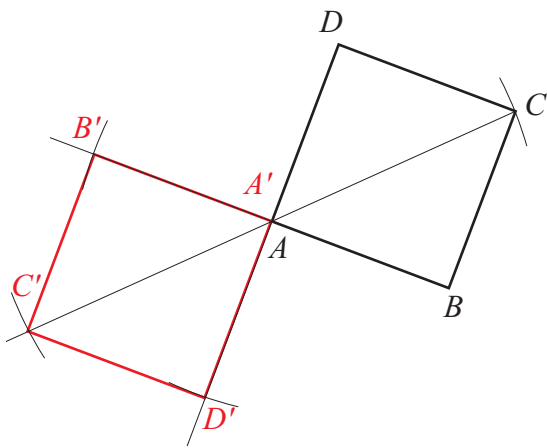


3.

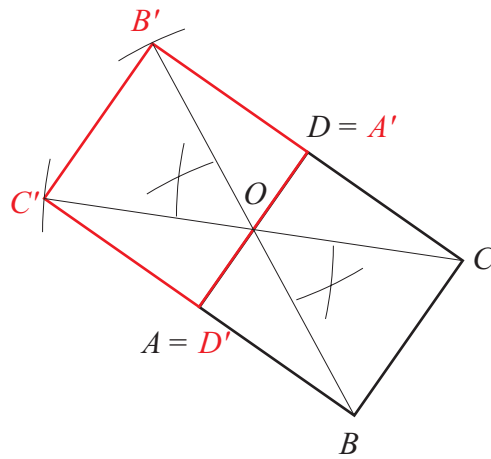


4.

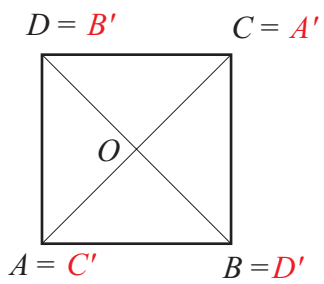
a)



b)

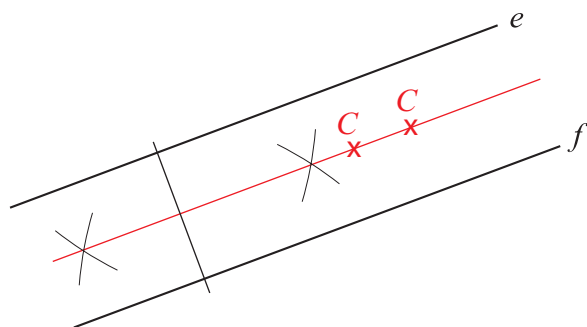


c)



- d) Szakas és tükörképe **egyenlő** hosszúságú.
 Szakas és képe **párhuzamos** helyzetű.
 Szög és képe **egyenlő** nagyságú.
 Alakzatnak és képének **megegyezik** a körüljárási iránya.

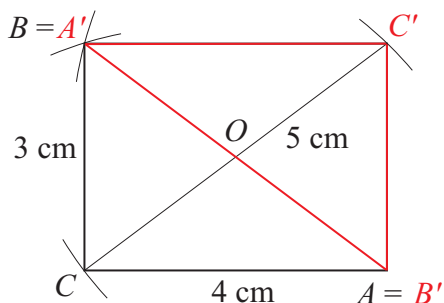
5.



A középpárhuzamos bármely pontja lehet C .
A feladatnak **végtelen sok** megoldása van.

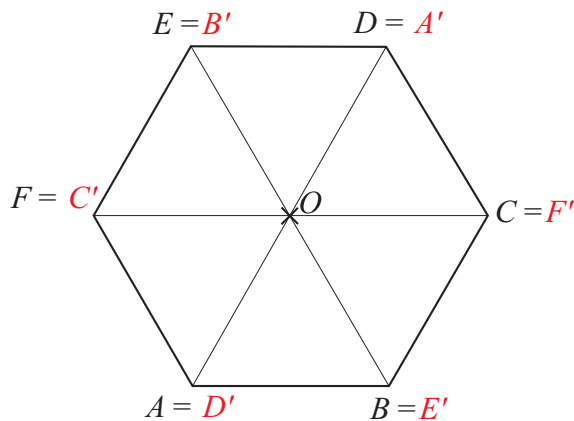
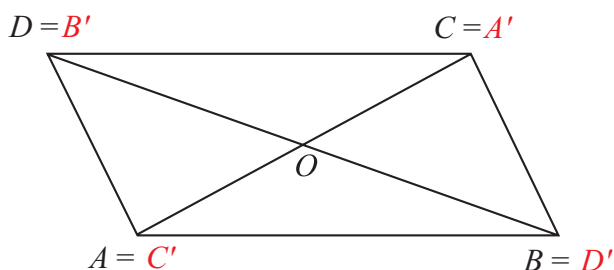
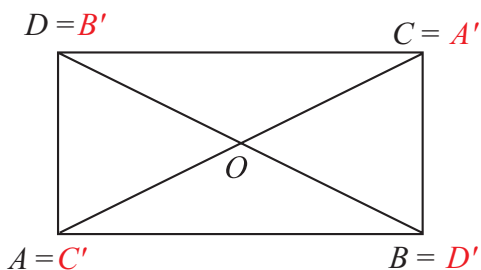
6. a) H; b) I; c) I; d) H; e) I; f) H; g) I.

7.



A két alakzat együttesen **téglalapot** alkot.

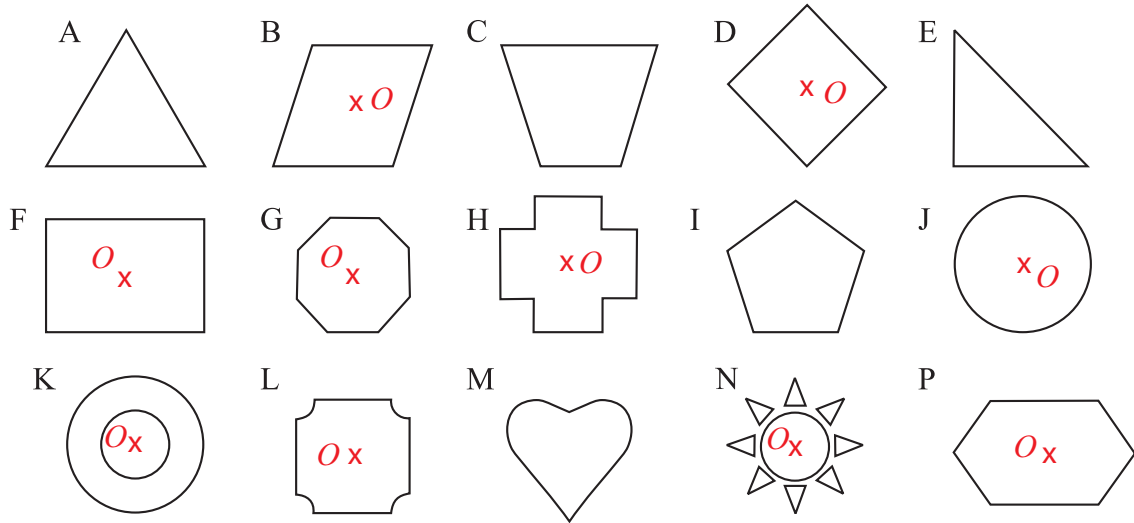
8.



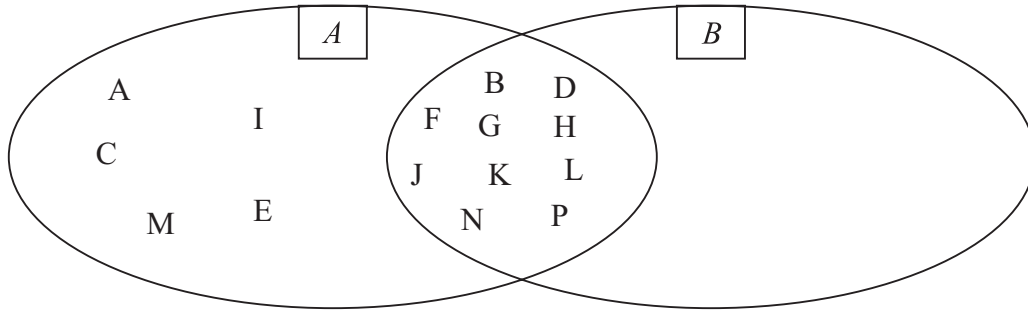
Mind a három alakzat önmagának a tükörképe. Ezek középpontosan szimmetrikus alakzatok.

KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

9. a)



b)



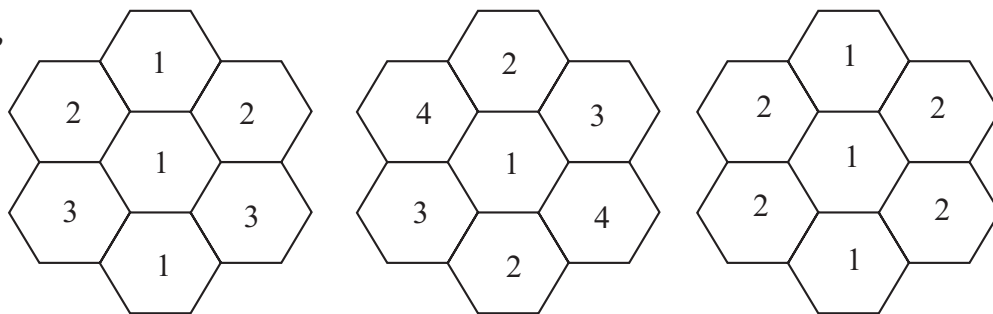
10. a) I; b) H; c) I; d) H; e) H; f) I; g) H.

11. a) 4, 8, 12; b) 3, 6, 10, 14; c) 3; d) 1, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15; e) 1, 2.

12. a) H; b) I; c) H; d) I; e) I; f) I.

13. $\delta = 43^\circ$; $\beta = 43^\circ$; $\varepsilon = 86^\circ$; $\Phi = 94^\circ$; $\varphi = 94^\circ$; $\gamma = 86^\circ$; $\eta = 94^\circ$; $\lambda = 43^\circ$; $\omega = 86^\circ$.

14.



KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

15.

○	◆	♥	●	△	●	♠	◆
⊙	■	✦	♠	□	✦	→	□
✦	○	△	□	■	□	○	○
♠	→	■	●	■	♠	●	✦
✦	●	♥	■	●	■	←	♥
○	○	□	■	□	▽	○	✦
□	←	✦	□	♥	✦	■	⊙
◆	♥	●	▽	●	♠	◆	○

Sokszögek

1. a) $3 \text{ centiméter} < c < 11 \text{ centiméter}$



b) $1,5 \text{ centiméter} < c < 8,5 \text{ centiméter}$



2. $\gamma = 72^\circ$; $\alpha = 79^\circ, \beta = 46^\circ$; $\alpha = 75^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 65^\circ$.

3. A háromszög harmadik szöge 54° .

Ez a háromszög **hegyes** szögű egyenlő **szárú** háromszög.

4. $\beta = 36^\circ, \gamma = 108^\circ$.

5. $\alpha = 72^\circ, \beta = 72^\circ$.

6. $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ vagy $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$.

7. a) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor van két egyenlő **szöge is**.

b) Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor van két egyenlő **oldala**.

c) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor az **egyenlő szárú** háromszög.

d) Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor az **egyenlő szárú** háromszög.

e) Ha egy háromszögnek minden szöge egyenlő, akkor oldalai **egyenlő** hosszúak.

f) Ha egy háromszögnek minden oldala ugyanolyan hosszúságú, akkor szögei **egyenlőek**.

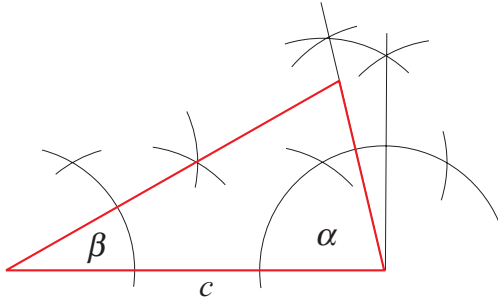
g) Ha egy háromszögnek minden oldala ugyanolyan hosszúságú, akkor az **egyenlő oldalú** háromszög.

h) Ha egy háromszögnek minden szöge egyenlő, akkor az **egyenlő oldalú** háromszög.

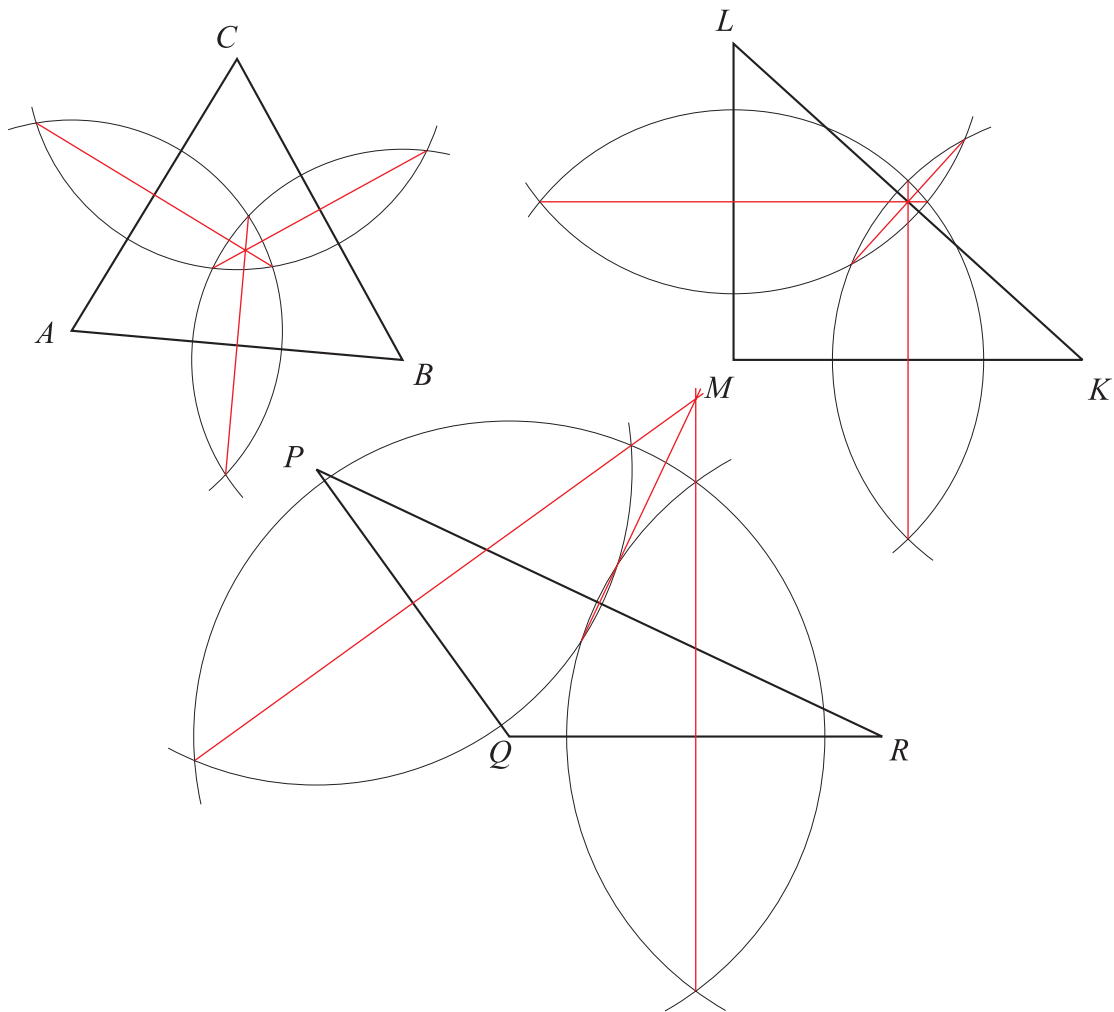
i) Bármely háromszögben a leghosszabb oldallal szemközt van a **legnagyobb** szög.

j) Bármely háromszögben a legnagyobb szöggel szemközt van a **leghosszabb** oldal.

8.



9.



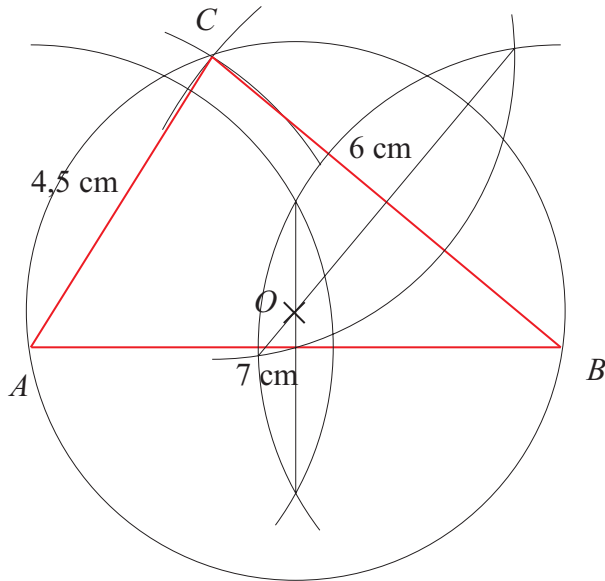
A háromszög oldalfelező merőlegesei **egy pontban** metszik egymást.

A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom **csúcsától** ezért ez a pont a háromszög **köré** írható körének a középpontja.

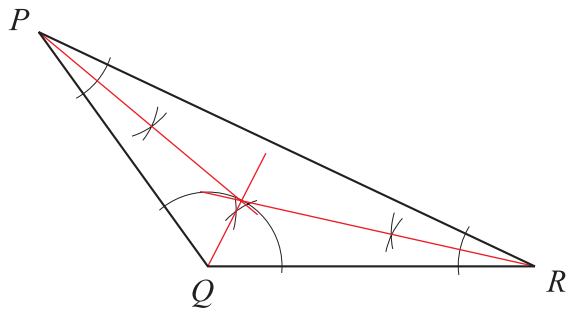
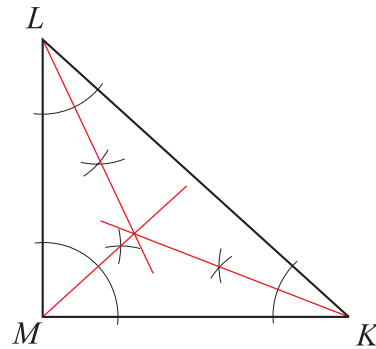
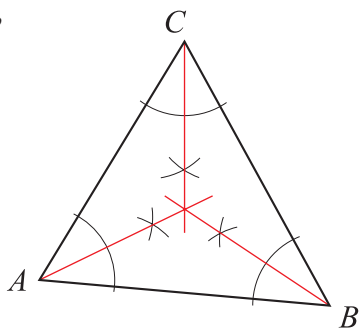
A háromszög csúcsain átmenő kör középpontja:

- hegyesszögű háromszögnél **a háromszög belsejében**,
- derékszögű háromszögnél **az átfogó felezőpontján**,
- tompaszögű háromszögnél **a háromszögön kívül** található.

10.



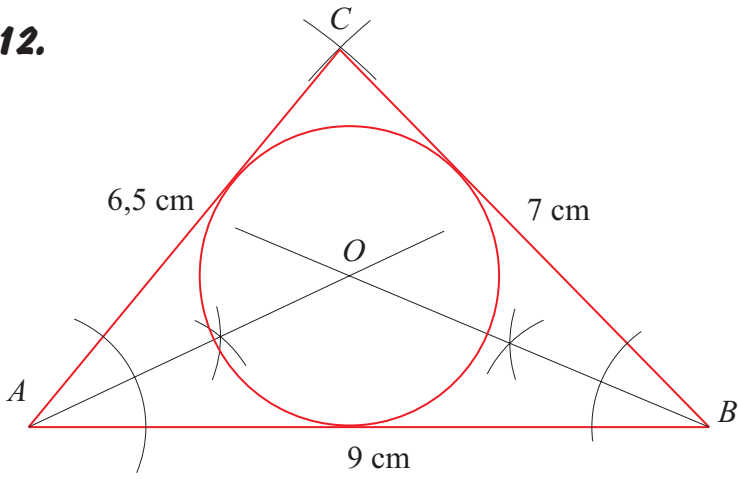
11.



A háromszög belső szögfelezői **egy pontban** metszik egymást.

A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom **oldalegyenesétől**, ezért ez a pont a háromszög **beírható** körének a középpontja.

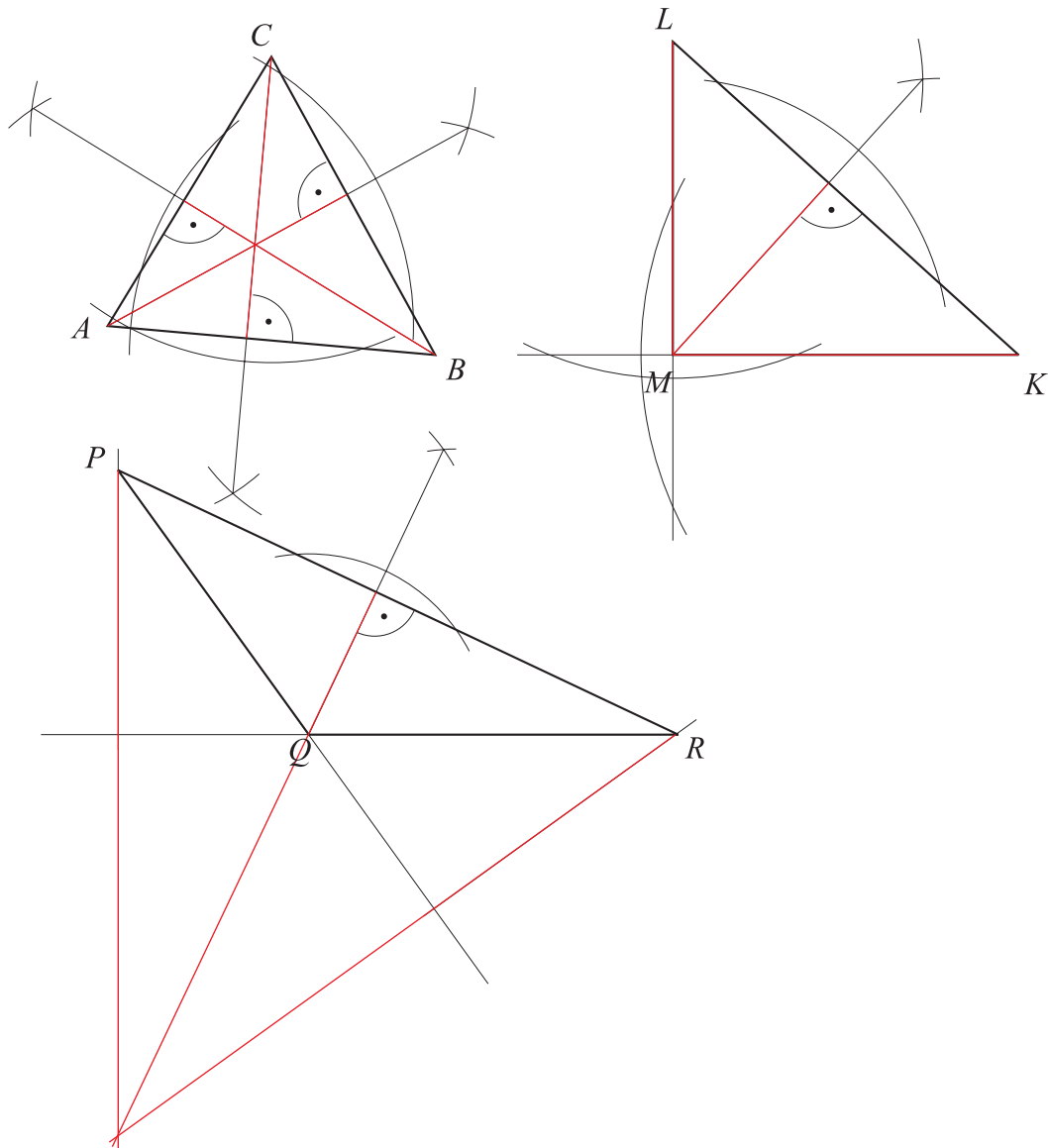
12.



13. $\varphi = 61^\circ$, $\varphi = 70^\circ$.

14. $\gamma = 68^\circ$.

15.



SOKSZÖGEK

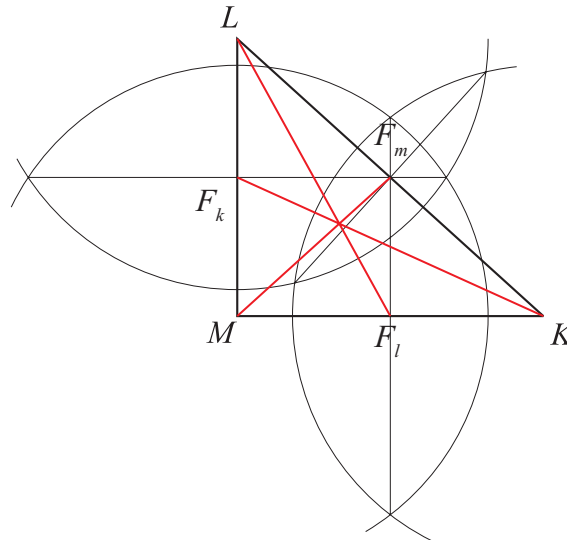
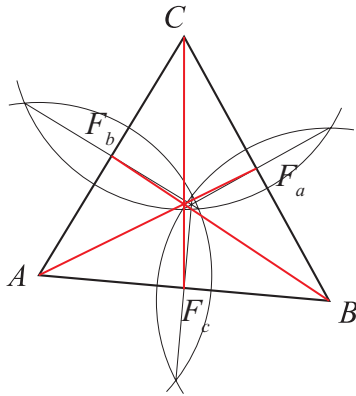
A háromszög magasságvonalai **egy pontban** metszik egymást.

A háromszög magasságvonalainak metszéspontja a magasságpont, amely a

- hegyesszögű háromszögnél **a háromszög belsejében**,
- derékszögű háromszögnél **a derékszögnél**,
- tompaszögű háromszögnél **a háromszögn kívül** található.

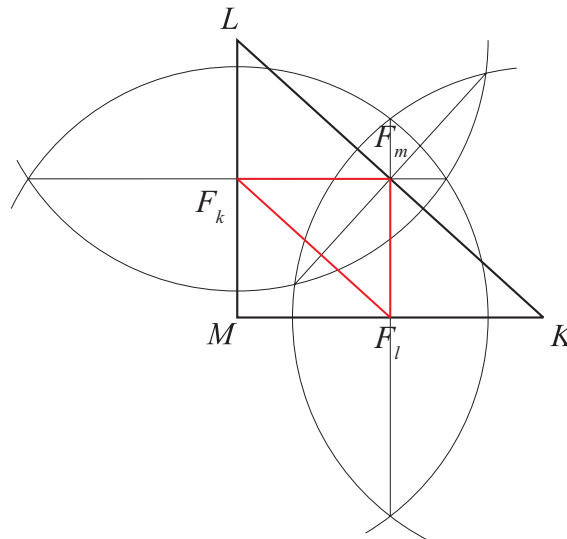
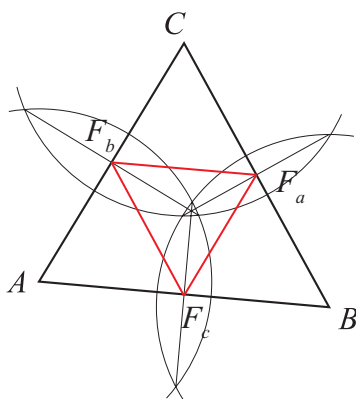
16. $\varepsilon = 49^\circ$, $\delta = 40^\circ$.

17.

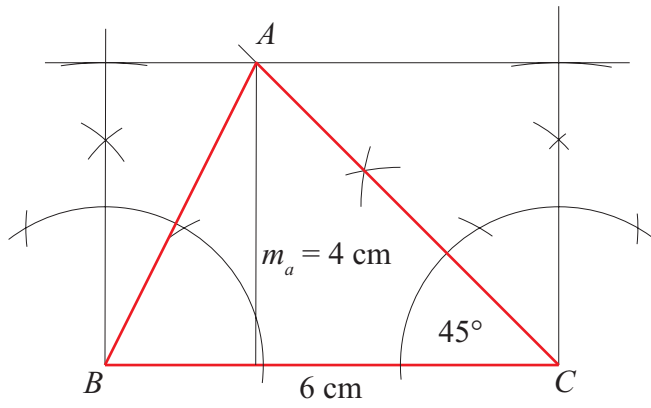


A háromszög súlyvonalai **egy pontban** metszik egymást. A háromszög súlyvonalainak metszéspontja a **súlypont**.

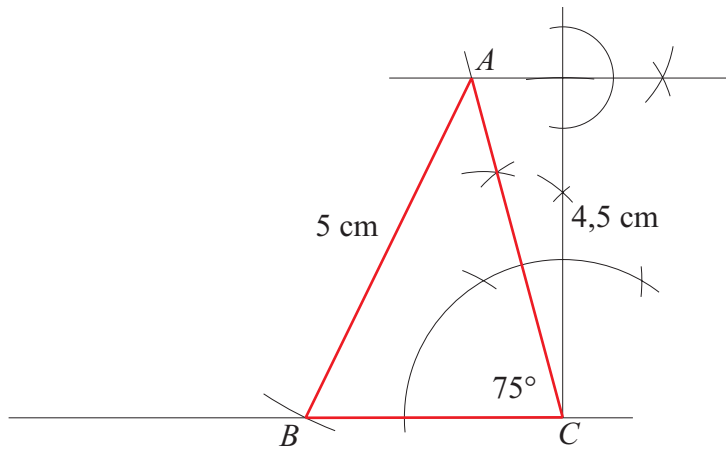
18.



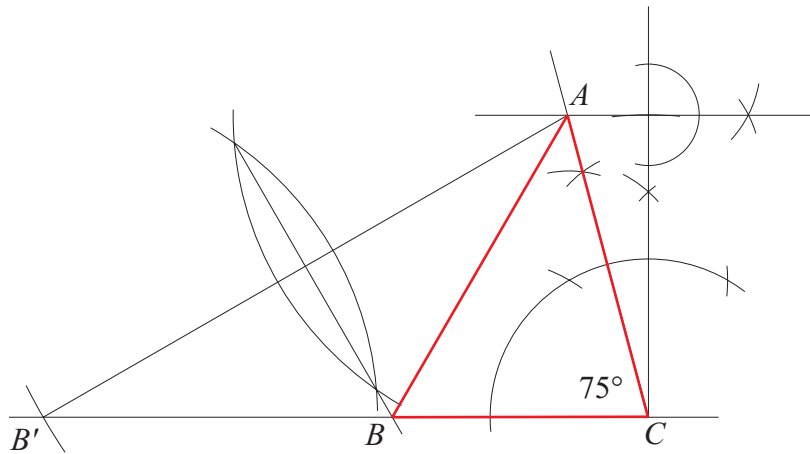
19.



20.



21.



22. a) $T_a = 30\text{ cm}^2$; b) $T_b = 9,8\text{ dm}^2$; c) $T_a = \frac{3}{20}\text{ m}^2$; d) $T_b = 16,5\text{ cm}^2$.

SOKSZÖGEK

23.

A háromszög egyik oldala	8 cm	4,8 cm	12 cm	3,2 cm	24 cm	36 cm
A fenti oldalhoz tartozó magasság	6 cm	10 cm	4 cm	15 cm	2 cm	$\frac{4}{3}$ cm

Állandó terület mellett az egyik oldal hossza és a hozzá tartozó magasság között **fordított** arányosság van.

24. $T_{ABC} = T_{ABD}$

Indoklás:

A közös oldal az AB szakasz. Mivel $AB \parallel DC$ ezért az AB szakasz egyenesének ugyanakkora a távolsága a D és C pontoktól, ezért a két háromszög AB oldalhoz tartozó magassága egyenlő hosszúságú.

25. $K = 18$ cm, $T = 13,5$ cm².

Az átfogóhoz tartozó magasság **3,6** centiméter.

26. a) a, c, d, f, g, i, j;

b) a, e, h, i, j;

c) a, d, g, j;

d) a, c, d, e, g, h, j;

e) j;

f) a, c, d, e, g, h, j;

g) a, j;

h) a, c, e, h, j;

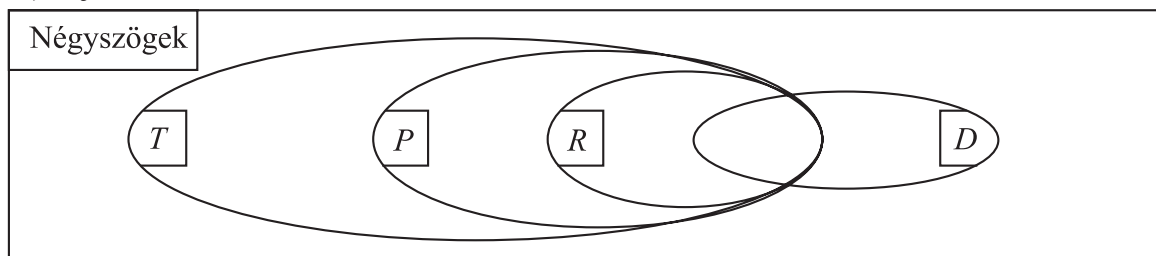
i) e, h, j;

j) a, c, j;

k) e, h, j;

l) a, d, g, j;

m) a, j;



- 27.** Az olyan négyszöget, amelynek van párhuzamos oldalpárja, **trapéz**nak nevezzük.
 A középpontosan szimmetrikus négyszögeket **paralelogramm**ának nevezzük.
 A húrtrapézok olyan négyszögek, amelyeknek a szimmetria tengelyük **oldalfelező pontokon** halad keresztül.
 A deltoidoknak van **csúcsokon** áthaladó szimmetria tengelyük.
 Minden négyzet **deltoid (paralelogramma)**.
 Minden rombusz **paralelogramma (trapéz)**.
 Van olyan paralelogramma, amely **rombusz**.
 A téglalap egyenlő szögű **paralelogramma**.
 A **négyzet** átlói merőlegesen egymásra, és egyenlő hosszúak.

28. I, I, H, H, I, I, I, H, H, H, I.

29. $\beta = 127^\circ$, $\gamma = 53^\circ$, $\delta = 127^\circ$;

$$\alpha = 65^\circ, \beta = 115^\circ, \gamma = 65^\circ, \delta = 115^\circ;$$

$$\alpha = 55^\circ, \beta = 164^\circ, \gamma = 16^\circ.$$

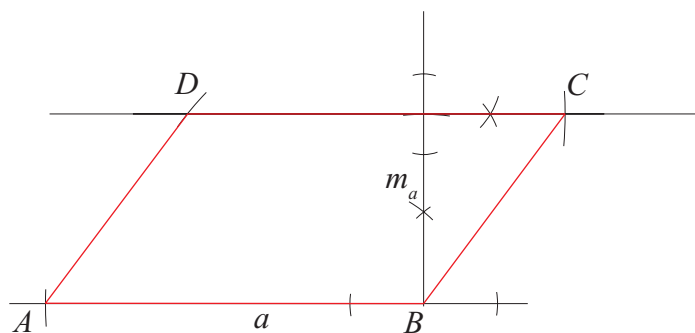
30. a) $\beta = 73^\circ$, $\delta = 122^\circ$;

b) $\alpha = 39^\circ$, $\beta = 66^\circ$, $\gamma = 141^\circ$, $\delta = 114^\circ$;

c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\delta = 150^\circ$;

d) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 70^\circ$, $\delta = 110^\circ$.

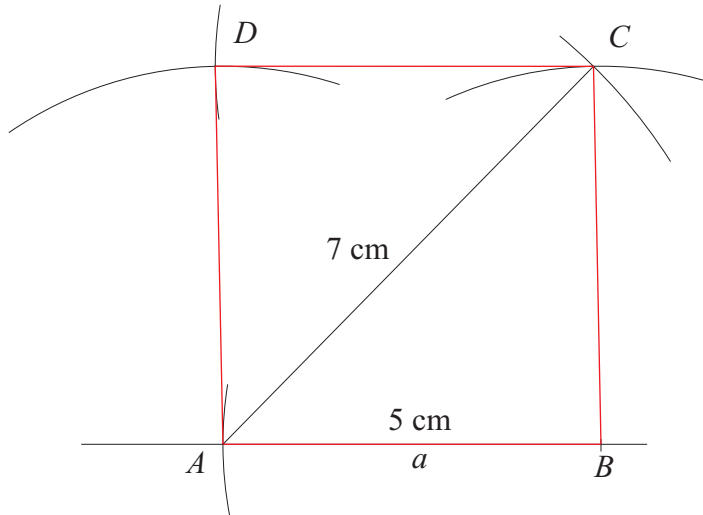
31.



32. Nincs megoldás.

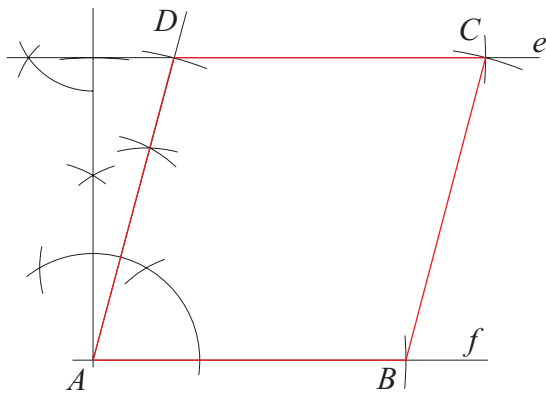
33. Szerkesztés menete:

1. ABC háromszög megszerkesztése (5 cm; 5 cm; 7 cm) oldalakkal.
2. C középpontú 5 cm sugarú körív rajzolása.
3. A középpontú 5 cm sugarú körív rajzolása.
4. A körívek metszéspontja a D csúcs.



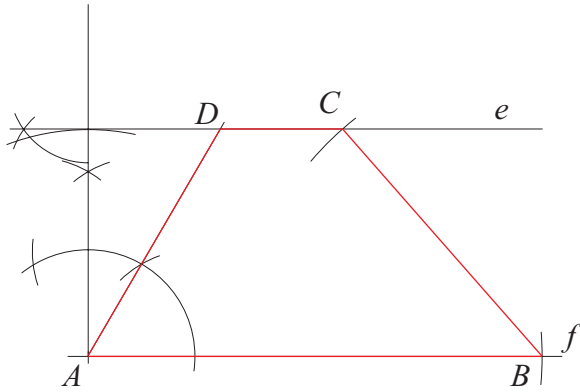
34. Szerkesztés menete:

1. Két, egymástól 4 cm távolságra lévő párhuzamos egyenes szerkesztése (e ; f).
2. Az f egyenes tetszőleges pontja A csúcs.
3. A pontba 75° -os szög szerkesztése.
4. A szög szár és az e egyenes metszéspontja a D csúcs és ezzel adott lesz az AD szakasz hossza.
5. D középpontú AD sugarú körív és e metszéspontja a C csúcs.



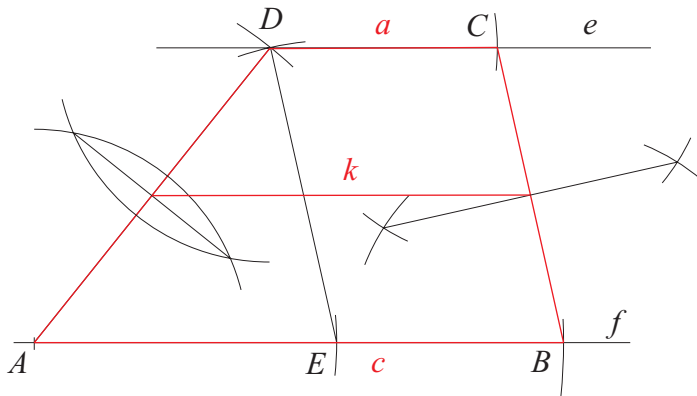
35. Szerkesztés menete:

1. e és f egymással párhuzamos, egymástól 3 cm távolságban lévő egyenespár szerkesztése.
2. A pont f egyenes egyik pontja.
3. A pontra 60° -os szög szerkesztése.
4. A szögzár és e metszéspontja a D csúcs.
5. B középpontú, 4 cm sugarú körív és e metszéspontja a C csúcs.



36. Szerkesztés menete:

1. AED háromszög szerkesztése (4 cm, 4 cm, 5 cm).
2. AE meghosszabbítása E -n túl, amelyen 3 cm távolságban B csúcs kijelölése.
3. D csúcson át párhuzamos szerkesztése az AB szakasszal (f).
4. B középpontú, 4 cm sugarú körív és f metszéspontja a C csúcs.



A középvonal hossza: **5 cm**. $k = \frac{a+c}{2}$

37. a) 45 cm^2 ; b) 12 dm^2 ; c) $0,06 \text{ m}^2$; d) $6,2 \text{ dm}^2$.

38. a) $K = 21 \text{ cm}$; b) $m_a = 4 \text{ cm}$, $m_b = 3 \text{ cm}$.

39. a) $a = 12 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$; b) $K = 56 \text{ cm}$.

SOKSZÖGEK

40. a) $T_a = 12,5 \text{ cm}^2$; b) $T_b = 6,3 \text{ dm}^2$; c) $T_c = 192,5 \text{ cm}^2$.

41.

a	c	m	T
13 cm	8 cm	4 cm	42 cm^2
9,6 cm	54 mm	3,6 cm	27 cm^2
6,4 dm	4,6 dm	2,4 dm	$13,2 \text{ dm}^2$

42. $T_{ADFG} = 24 \text{ cm}^2$; $T_{DBEF} = 19 \text{ cm}^2$; $T_{GEC} = 27 \text{ cm}^2$.

43. a) 1800° ; b) 150° ; c) 30° ; d) 54.

44. a) 2340° ; b) 156° ; c) 24° ; d) 90.

45. a) 3240° ; b) 18° ; c) 162° ; d) 170.

46. a) 8; b) 135° ; c) 20; d) 45° .

47. a) 12; b) 150° ; c) 54; d) 30° .

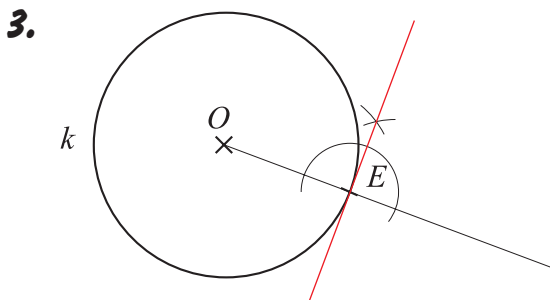
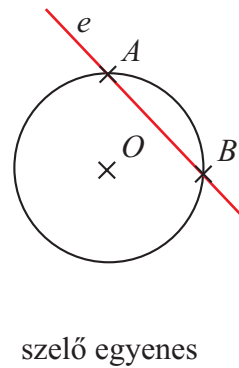
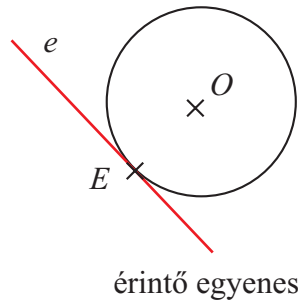
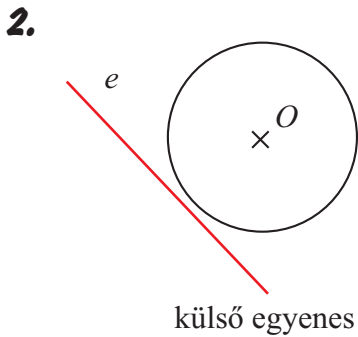
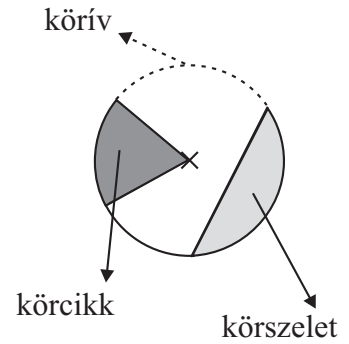
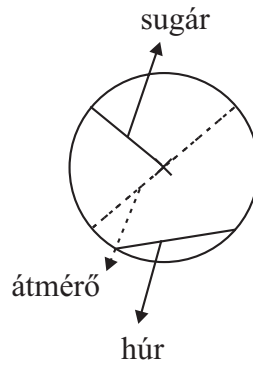
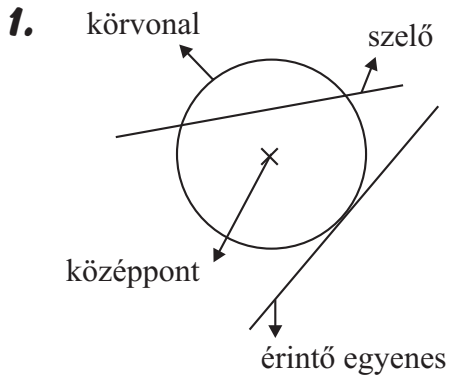
48. a) 9; b) 15; c) 18.

49. a) 9; b) 17; c) 21; d) 25.

50. $T_{BDKH} = 40 \text{ cm}^2$; $T_{ABHG} = 24 \text{ cm}^2$; $T_{BCD} = 22,75 \text{ cm}^2$; $T_{ABCDEFGH} = 150,75 \text{ cm}^2$.

51. $T_{ABFE} = 45 \text{ cm}^2$; $T_{FCDE} = 32 \text{ cm}^2$; $T_{BCF} = 35 \text{ cm}^2$; $T_{ABCD} = 112 \text{ cm}^2$.

A kör



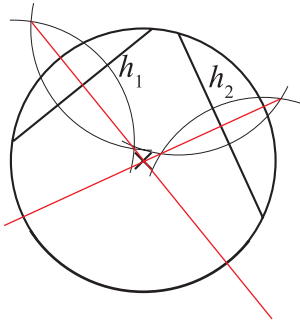
Az érintési pontba húzott sugár és az érintő egyenes mindig **merőleges** helyzetű.

4. $h_1 < h_2$, $i_1 < i_2$, $h_2 = h_3$, $i_2 = i_3$.

Egyenlő sugarú körökben nagyobb középponti szöghöz **hosszabb** húrok és **hosszabb** ívek tartoznak.

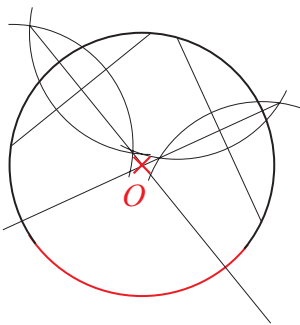
Egyenlő sugarú körökben egyenlő középponti szöghöz **egyenlő hosszúságú** húrok és **egyenlő hosszúságú** ívek tartoznak.

5.



A húr felező merőlegese áthalad a kör **középpontján**. Egy kör két, egymással nem párhuzamos húrjainak felező merőlegesei meghatározzák a kör **középpontját**.

6.



7. a) 31,4 cm; b) 28,26 mm; c) 1,57 dm; d) 4,71 m.

8. a) 8 cm; b) 7,5 dm; c) 0,7 m; d) 0,16.

9. a) 153,86 cm²; b) 105,6296 mm²; c) 0,63585 dm²; d) 2,0096 m².

10. a) 5 cm; b) 8 dm; c) 0,2 m; d) kb. 0,51 cm.

11. Kati kerékpárjának a kereke a 2,5 kilométeres úton **1106** fordulatot tesz.

12. $K_{\text{kicsi}} = 6\pi$, $T_{\text{kicsi}} = 9\pi$,

$K_{\text{nagy}} = 14\pi$, $T_{\text{nagy}} = 49\pi$,

$K_{\text{körgyűrű}} = 20\pi = 62,8$ cm, $T_{\text{körgyűrű}} = 40\pi = 125,6$ cm².

A KÖR

13. $K_{\text{körgyűrű}} = 40 \pi = 125,6 \text{ cm}$; $T_{\text{körgyűrű}} = 80 \pi = 251,2 \text{ cm}^2$.

14. Az üveghulladék területe **2752 cm²**.

15. a) A körív hossza = 2,616 cm, $K_{\text{körcikk}} = 12,616 \text{ cm}$;

b) A körív hossza = 47,1 cm, $K_{\text{körcikk}} = 67,1 \text{ cm}$.

16. a) $T_{\alpha} = 33,493 \text{ cm}^2$; b) $T_{\beta} = 188,4 \text{ cm}^2$.

17. a) $r = 6 \text{ cm}$; b) $K_{\text{kör}} = 12 \pi = 37,68 \text{ cm}$; c) $T_{\text{hulladék}} = 30,96 \text{ cm}^2$; A négyzetlap **21,5** százaléka lett hulladék.

18. a) $K_{\square} = 39,6 \text{ cm}$; b) $T_{\text{hulladék}} = 55,86 \text{ cm}^2$; A körlap **kb. 36,3** százaléka lett hulladék.

19. a) $T_{\text{szürke}} = 21,5 \text{ cm}^2$; b) $T_{\text{szürke}} = 21,5 \text{ cm}^2$; c) $T_{\text{szürke}} = 60,75 \text{ cm}^2$.

20. $T_{\text{szürke}} = 43 \text{ cm}^2$.

21. $T_{\text{szürke}} = 50,24 \text{ cm}^2$.

Hasábok, hengerek

- 1.** Egyenes hasáb: Az oldalélek **merőlegesek** az alaplap síkjára.
oldalél = testmagasság
Ferde hasáb: Az oldalélek nem **merőlegesek** az alaplap síkjára.
oldalél > testmagasság

2.

A hasáb alaplapja	Csúcsok száma (c)	Élek száma (e)	Lapok száma (l)
háromszög	6	9	5
négyszög	8	12	6
ötszög	10	15	7
hatszög	12	18	8
nyolcszög	16	24	10
tízsög	20	30	12

$$c + l > e$$

$$c + l = e + 2$$

- 3.** a) Nyolcszög; b) hatszög; c) kilencszög.

- 4.** a) 45; b) 110; c) 72; d) hatszög, 126.

- 5.** A kocka éle **26** centiméter.

6. $218 \text{ cm}^2 = 2,18 \text{ dm}^2$,

$$2 \text{ 0,45 cm}^2 = 2045 \text{ mm}^2,$$

$$5,7 \text{ dm}^2 = 0,057 \text{ m}^2,$$

$$2 \text{ 6700 cm}^2 = 2,67 \text{ m}^2,$$

$$203,4 \text{ m}^2 = 0,0002034 \text{ km}^2,$$

$$2 \text{ 45 km}^2 = 24500 \text{ ha},$$

$$325 \text{ cm}^2 = 0,0325 \text{ m}^2,$$

$$8900 \text{ m}^2 = 0,89 \text{ ha},$$

$$\frac{3}{4} \text{ cm}^2 = 75 \text{ mm}^2,$$

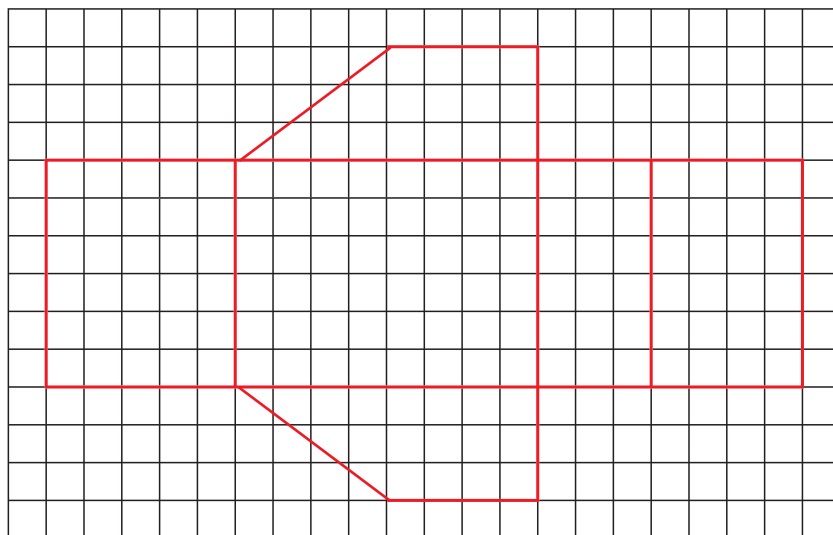
$$\frac{4}{5} \text{ m}^2 = 80 \text{ dm}^2.$$

7. $A = 434 \text{ cm}^2$.

8. $A = 7580 \text{ cm}^2$.

9. $A = 465 \text{ cm}^2$.

10. $A = 39 \text{ cm}^2$.



11. $21 \text{ cm}^3 = 0,021 \text{ dm}^3$,

$0,04 \text{ cm}^3 = 40 \text{ mm}^3$,

$15,9 \text{ dm}^3 = 0,0159 \text{ m}^3$,

$63\,700 \text{ cm}^3 = 0,0637 \text{ m}^3$,

$3,4 \text{ m}^3 = 3400 \text{ liter}$,

$14,5 \text{ dm}^3 = 14\,500 \text{ cm}^3$,

$325 \text{ liter} = 325 \text{ dm}^3$,

$8900 \text{ cm}^3 = 8,9 \text{ liter}$,

$\frac{3}{5} \text{ cm}^3 = 600 \text{ mm}^3$,

$\frac{5}{8} \text{ m}^3 = 625 \text{ dm}^3$.

12. $V = 42,875 \text{ dm}^3 = 42,875 \text{ liter}$.

13. a) $V = 248 \text{ cm}^3$; b) Ha $\frac{3}{5}$ részéig töltjük **0,1488** dl víz lesz benne.

14. $V = 360 \text{ cm}^3$.

15. a) $V = 288\,000\,000\text{ cm}^3$; b) A kiásott föld tömege **432** tonna.

16. A keletkezett doboz térfogata **45 cm³**.

17. A töltés **1425 m³** földet tartalmaz.

18. $A = 840\text{ cm}^2$; $V = 1200\text{ cm}^3$.

19. a) $A = 301,44\text{ cm}^2$, $V = 401,92\text{ cm}^3$; b) $A = 791,28\text{ dm}^2$, $V = 1695,5\text{ dm}^3$.

20. A fazékba **15,8256** liter víz fér.

21. $A = 904,32\text{ cm}^2$, $V = 2034,72\text{ cm}^3$.

22. $A_{\text{kifűrt test}} = 396,52\text{ cm}^2$, $V_{\text{kifűrt test}} = 368,6\text{ cm}^3$.

23. a) $r = 10\text{ cm}$, $m = 6\text{ cm}$, $A = 1004,8\text{ cm}^2$, $V = 1884\text{ cm}^3$;

b) $A = 602,88\text{ cm}^2$, $V = 1130,4\text{ cm}^3$;

c) $A = 345,4\text{ cm}^2$, $V = 471\text{ cm}^3$.

24. a) A tartály magassága **4 m**. b) A lefestett felület nagysága **103,62 cm²**.

25. A fahulladék térfogata **273,6 dm³**.

26. A doboz magassága **12,5 cm**.

27. A két edény megtöltéséhez **87,065** deciliter vízre volt szükség.

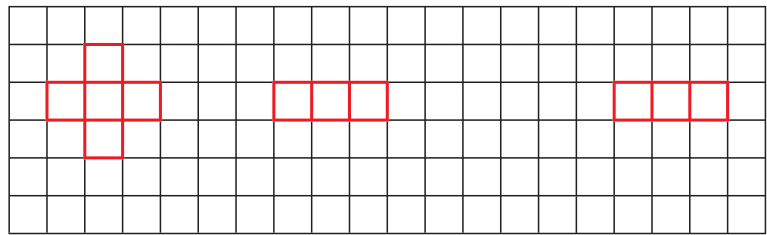
HASÁBOK, HENGEREK

28. $A_{\text{test}} = 198 \text{ cm}^2$, $V_{\text{test}} = 135 \text{ cm}^3$.

Felülnézet:

Elölnézet:

Oldalnézet:

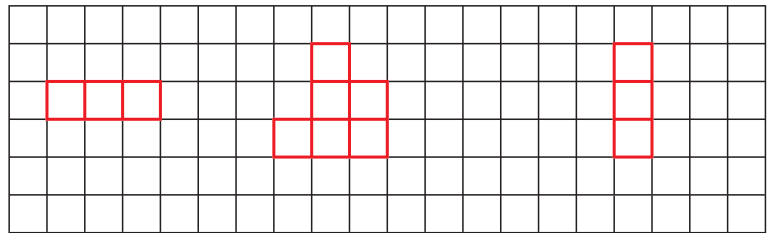


29. $A_{\text{test}} = 600 \text{ cm}^2$, $V_{\text{test}} = 750 \text{ cm}^3$.

Felülnézet:

Elölnézet:

Oldalnézet:



Év végi tudáspróba

1. feladatsor

1. a) $-\frac{17}{36}$; b) -7 .

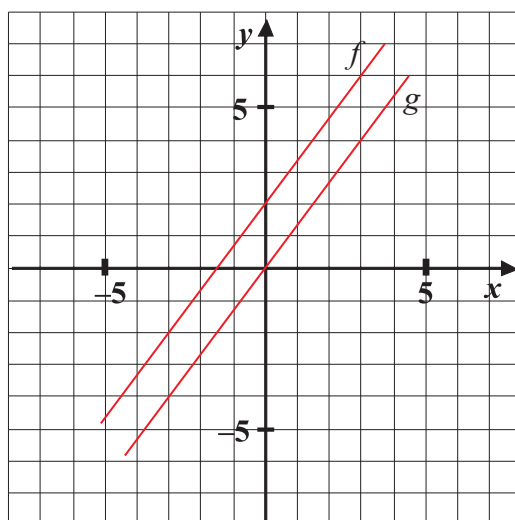
2. a) Összesen **280** köbméter földet termeltek ki.

b) A föld elszállításához a teherautó **80** fordult.

3. a) $x = 1$; b) $x = 11$.

4. A keresett szám **180**.

5. $g(x) = \frac{4}{3}x$.



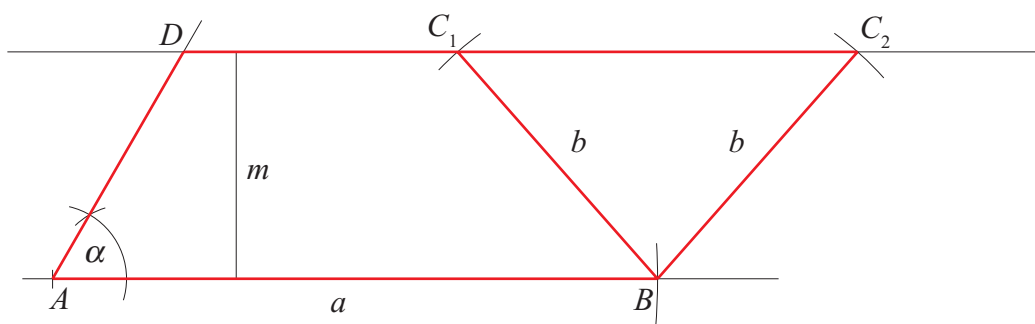
6. $\alpha = 67^\circ$, $\alpha' = 113^\circ$;
 $\beta = 44^\circ$, $\beta' = 136^\circ$;
 $\gamma = 69^\circ$, $\gamma' = 111^\circ$.

7. A magasságot **20%**-kal kell változtatni, hogy a paralelogramma területe ne változzon.

8. Szerkesztés menete:

1. A 8 cm-es AB szakasz felvétele.
2. A pontba 60° -os szög szerkesztése.
3. AB szakasszal párhuzamos (f) szerkesztése 3 cm távolságra.
4. A szögcsár és f metszéspontja D .
5. B középpontú, 4 cm sugarú körív és f metszéspontja C_1 és C_2 .

A feladatnak 2 megoldása van.



9. $(2^2 \cdot 5 \cdot 7; 5^2 \cdot 7) = 35$, $[2^2 \cdot 5 \cdot 7; 5^2 \cdot 7] = 700$, $\frac{2^2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7}}{5^2 \cdot \cancel{7}} = \frac{4}{5}$, $\frac{2}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5^2 \cdot 7} = \frac{26}{700}$.

10. A sokszög **kilenc** oldalú, egy belső szöge 140° -os.

2. feladatsor

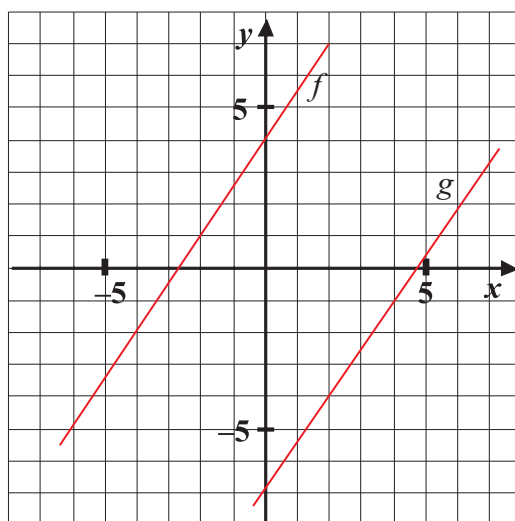
1. a) 15000; b) $-\frac{4}{21}$.

2. A nagyobb szám 0,7.

3. a) $x = 1$; b) $x \leq 24$.

4. A keresett számok 138 és 86.

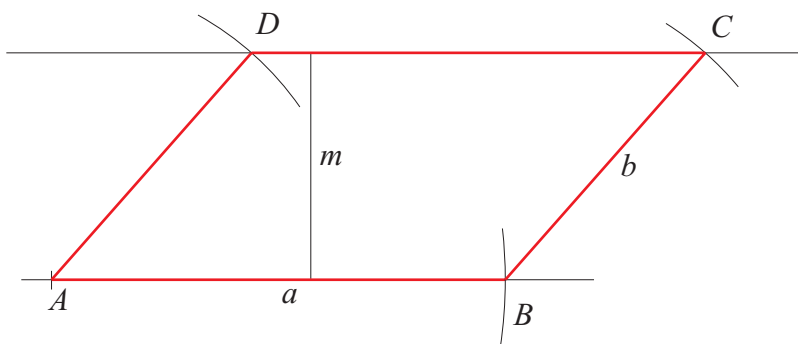
5. $g(x) = \frac{3}{2}x - 7$.



6. a) Az akvárium elkészítéséhez **4730 cm²** üveget használtak fel.
b) Az akváriumban az adott feltétel mellett **25,65** liter víz van.

7. A 32 embernek az adott feltételek mellett **9** napig tart a búza aratása.

8. $K = 20 \text{ cm}$, $T = 18 \text{ cm}^2$.



9. A háromszög belső szögei 28° , 60° , 92° .

10. $K_{\text{körcikk}} = 32,746 \text{ cm}$, $T_{\text{körcikk}} = 66,986 \text{ cm}^2$.

3. feladatsor

1.

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$a : b$
$-\frac{33}{55} = -\frac{3}{5}$	$-\frac{520}{780} = -\frac{2}{3}$	$-1\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$
1224	-0,36	11,88	12,6	-4,4064	-34

2. $T = 192 \text{ cm}^2$.

3. $\frac{1-2xy}{3x^2y} = -3\frac{1}{3}$.

4. Az üzemnek összesen **1400** dolgozója van.

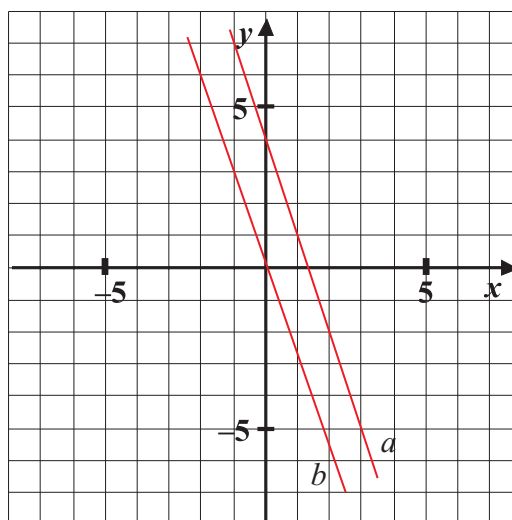
5. a) $y = -11$; b) $x > \frac{20}{6}$.

6. a) A szabályos sokszögnek **14** oldala van.

b) A szabályos sokszög összes átlóinak száma **77**.

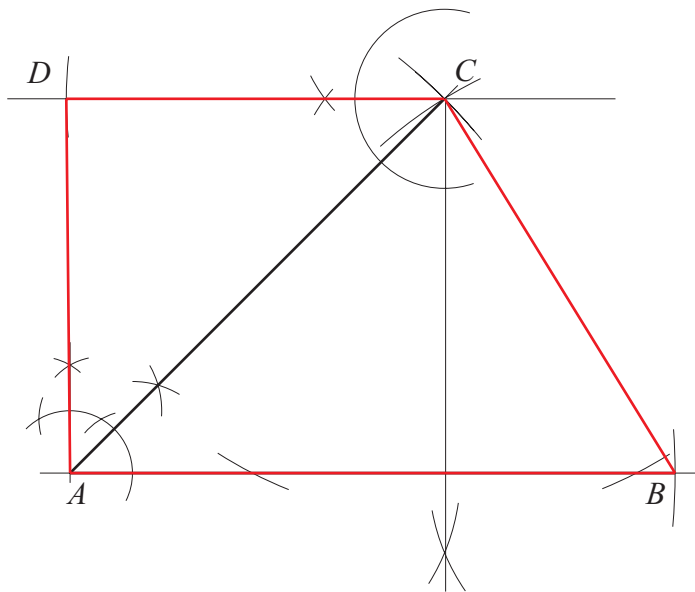
c) A szabályos sokszög egy-egy belső szöge **$154\frac{2}{7}^\circ$** .

7. $a(x) = -3x + 4$, $b(x) = -3x$.



8. Szerkesztés menete:

1. Az ABC háromszög megszerkesztése.
2. C ponton át párhuzamos egyenes szerkesztése az AB szakasszal.
3. C középpontú 5 cm sugarú körív és a párhuzamos metszéstengelye D .



9. $V = 360 \text{ cm}^3$. A test tömege **972** gramm.

10. Kati most **30** éves.